Úvod

Tato skripta jsou určena posluchačům pedagogické fakulty všech směrů studia. Jsou rozdělena do tří částí: V první části je uveden stručný přehled vývoje matematiky od nejstarších dob až po současnost. Je zřejmé, že uvést detailně takovýto přehled by přesáhlo rozsah těchto skript, proto se autor soustředil na ty partie, které se probírají na základních a středních školách. Kromě samotných faktů jsou zde uvedeny i možné příklady využití dané problematiky při výuce. V druhé části jsou uvedeny životopisy významných matematiků, přednost dostali opět ti, s jejichž jmény se mohou žáci setkat v hodinách matematiky. Konečně třetí část je sestavena z referátů, zde může čtenář nalézt inspiraci pro svou pedagogickou praxi.

Část I

Vybrané části z dějin matematiky

Kapitola 1

Starověká matematika

Zatímco historikové mapující vývoj matematiky řekněme v druhé polovině 19. století mají relativně snadnou úlohu, jelikož tehdy bylo běžné, že vědci své výsledky publikovali a tyto publikace se zachovaly v knihovnách, tak historikové bádající o počátcích matematiky, mají úlohu velmi nesnadnou, neboť se prakticky žádné prameny nedochovaly, bylo-li jich vůbec dostatečné množství. Přesto existují jisté indicie, že matematické znalosti měl již člověk ve starší době kamenné. věhlasný moravský badatel prof. Karel Absolon objevil při vykopávkách v Dolních Věstonicích mj. i vlčí žeberní kost, na níž bylo 55 vrypů, přičemž každý pátý vryp byl o něco delší. Později byly objeveny na jiných místech další podobné kosti. Takto upraveným kostnem dnes říkáme *vrubovky.* Ačkoliv o jejich účelu vedou vědci dodnes spory, je docela pravděpodobné, že sloužily k počítání předmětů. Ostatně každý vrchní si dnes počíná obdobným způsobem.

Dobrodružné knihy z pravěku, jež psával Eduard Štorch a které byly v mých mladých dobách mezi kluky velice oblíbené, dnes již možná nejsou in, přesto si jednu dovolím připomenout. Hrdinou románu Lovci mamutů je teenager Kopčem, jenž byl velice hloubavý a na svou dobu také vzdělaný, jelikož uměl počítat do pěti, což kromě náčelníka a několika předních lovců nikdo neuměl. Jestliže počet předmětů přesahoval pět, tak se říkalo, že věcí je mnoho. Tedy dnešní $\aleph_0$ svým způsobem znali již lovci mamutů, jen s tím rozdílem, že pod pojmem spočetná konečná množina se rozuměly všechny množiny, u nichž počet prvků přesáhl pět. Je ovšem zajímavé, že podobný způsob počítání mají i některé přírodní národy euroatlantickou civilizací zatím nedotčené. Ostatně i v dnešních živých jazycích lze nalézt obdobný příklad. Počítáme jedna, dvě, tři, čtyři atd. Pokud ovšem bereme jistou část celku, tak máme polovinu, třetinu, čtvrtinu ap. Podobnou zajímavost lze nalézt i v jiných jazycích, třebas Angličané počítají one, two, third, four a dělí half

Zatímco paleolitický a mezolitický člověk byl kočovník, lovec a sběrač, tak lidé v neolitu se začali pozvolna usazovat na jednom místě, alespoň po určitou dobu, neboť změnili způsob obživy. Z kočovníka a lovce se stal usedlý zemědělec, lidé si začali budovat stálá sídla, lidská společnost se začala atomizovat, neboť lidé se začali specializovat na určitý způsob práce. Dochází k prvním dvěma velkým dělbám práce—oddělení obdělávání půdy a pastevectví a oddělení zemědělské výroby od řemesla. Stavba obydlí, výroba nástrojů a keramiky, to vše nasvědčuje, že se rozvíjely i matematické, především geometrické znalosti lidí. Jak dosvědčují archeologické nálezy, lidé zdobili keramiku geometrickými vzory, podle tohoto zdobení historikové dokonce označují jednotlivé kultury, neboť nevíme, jak se tyto pravěké národy jmenovaly (lidé se spirálovitou keramikou, volutovou keramikou, kultura zvoncových pohárů ap.). S růstem materiálního bohatství si společnost mohla dovolit i do té doby nemožnou věc. Někteří lidé byli vyčleněni z výrobního procesu a začali se věnovat činnosti duchovní. To se však již dostáváme do historické epochy, kterou dnes nazýváme starověk a která je charaktrizována změnou uspořádání společnosti, mluvíme o civilizacích.

1.1 Matematika starověkého Egypta

Egyptská civilizace vznikla na dolním toku Nilu, počátky egyptského státu klademe do roku asi 3 000 let př. Kr., kdy došlo ke sjednocení Horního a Dolního Egypta. Egyptskou říši založenou Menim můžeme s klidným svědomím nazvat říší tisíciletou, vždyť trvala prakticky bez přerušení až do roku 525 př. Kr., kdy tuto říši vyvrátili Peršané. Abychom si učinili jen malou představu o tom, jak velké časové období tato říše trvala, proveďme malé srovnání s naší zemí. Odečteme-li od dnešní doby 2 500, dostaneme se do roku 600 let př. Kr. Dějepisci ani nevědí jak se jmenovaly kmeny na tomto území sídlící a jaké měla tato země jméno; keltští Bójové k nám totiž přišli asi o sto let později. O znovuzrození Egypta se zasloužil jeden z vojevůdců Alexandra Velikého Ptolemaios, jenž založil poslední královskou dynastii starověkého Egypta.

Ptolemaiovská říše zažila zejména za vlády prvních Ptolemaiů velice prosperovala a stala se střediskem vzdělanosti tehdejšího světa. V nově založeném hlavním městě Alexandrii bylo zásluhou Démetria Falérského založeno Múseion (Dům múz) a v této instituci pracovali téměř všichni nejvýznamnější vědci té doby. I nejznámější matematický spis—Eukleidovy základy bylo sepsáno v této instituci štědře podporované králem-faraonem Ptolemaiem I. Název této instituce přetrval do dnešní doby ve slově muzeum, její činnost však byla mnohem bližší dnešní Akademii věd. Během krátké doby se podařilo v Alexandrii vybudovat i obrovskou knihovnu, v jejichž depozitářích byly statisíce svitků. Traduje se, že pokud někdo přišel do Alexandrie a měl u sebe knihu, byla mu tato odebrána a uložena v knihovně, původní majitel se musel spokojit jen s opisem.

Po smrti poslední Egyptské královny Kleopatry VII.[1] se Egypt stal součástí římské říše. V 7. století Egypt dobyli Arabové a podařilo se jim dokončit to, co začal již Caesar a v čem úspěšně pokračovali křesťanští římští císařové v čele se zbožným Theodosiem, totiž zlikvidovat zbytky kdysi slavné alexandrijské knihovny. Říká se, že když se arabští vojáci ptali svého velitele co dělat s knihami, dostalo se jim této odpovědi: "Spálit. Buďto je v nich to, co je v koránu, pak jsou zbytečné, nebo je

[1] Tato milenka Římanů Caesara a Marca Antonia je hlavní postavou několika románů, divadelních her a filmů a patrně nejznámější Egypťankou vůbec.

v nich něco jiného, pak jsou škodlivé."[2] V zájmu spravedlnosti však musíme říci, že tento postoj byl u středověkých arabských vládců spíše ojedinělý a platí jen pro počáteční období islámu. Na jimi obsazených územích se vědě dařilo, bohužel i jimi založené knihovny byly později vděčným objektem tentokrát křesťanských vandalů.

Pro moderní Evropu objevila Egypt Napoleonova výprava na sklonku 18. století, sice vojensky pro Francouze nakonec neúspěšná, leč pro poznání starověkého Egypta velmi významná. Bonaparte s sebou totiž vzal i významné francouzské vědce, z matematiků se mj. zúčastnili Monge a Fourier. Ačkoliv Francouzi hodlali nalezené památky odvézt domů, aby je uchránili před nevzdělanými felláhy[3], díky nim tehdejší Evropa poznala starověký Egypt a zrodila se nová věda—egyptologie. Ostatně Napoleon Bonaparte byl jedním z mála moderních vládců, který si uvědomoval význam vědy pro společnost. Traduje se, že před bitvou vždy velel učenci a oslové doprostřed. Pokud si uvědomíme, jak velký význam měli oslové pro tehdejší armádu kvůli přepravě nákladu, nevyznívá tento rozkaz pro učence vůbec pejorativně nýbrž naopak. Tento důstojník dělostřelectva a pozdější císař se zajímal o nejnovější vědecké objevy a při udělování poct se vědci nekrčili někde vzadu, nýbrž naopak. Sám matematiku velmi dobře ovládal a dovedl ocenit její význam.

Leč vraťme se do starověkého Egypta. Ačkoliv staří Egypťané bývají označováni jako nejpsavější národ starověku a zanechali nám spoustu psaného materiálu, bohužel matematických textů nám zůstalo pramálo, snad proto, že matematické spisy nebyly tesány hieroglyfy do kamene, nýbrž psané hieratickým písmem na papyrové svitky. Dochované památky, především pyramidy, hrobky a chrámové komplexy dokazují, že matematické znalosti starých Egypťanů byly velké, i když asi měly spíš empirický charakter.

Nejznámější staroegyptský matematický text je tzv. Rhindův papyrus, který byl sepsán v 16. století př. Kr., avšak jeho předloha je zhruba o tři století starší. Pojmenován je po anglickém starožitníku Rhindovi, jenž ho v roce 1858 zakoupil. Dva velké fragmenty jsou nyní v Britském muzeu v Londýně, několik menších zlomků se dostalo do brooklynského muzea. Sestává se ze čtrnácti listů širokých 38-40 cm, celková délka obou větších fragmentů je 513 cm. Moskevský papyrus byl zakoupen Rusem Goleniščevem koncem 19. století a dnes ho nalezneme v Puškinově muzeu krásných umění v Moskvě. Původní rozměry se odhadují na 544x8 cm, dnes se však sestává z jednoho většího kusu o jedenácti listech a devíti malých zlomků. Několik zlomků papyru s matematickými texty se nalezly v roce 1889 v Káhúnu, dva malé zlomky vlastní Berlínské muzeum. V Egyptském muzeu v Káhiře opatrují dvě dřevěné tabulky s matematickými texty a tím výčet staregyptských matematických památek končí.

Podívejme se tedy, co se z matematických znalostí starých Egypťanů dochovalo do dnešní doby. Základem matematiky je číslo a staří Egypťané pracovali s čísly celými a se zlomky. Pro celá čísla vyvinuli desetinný nepoziční systém zápisu, který využíval číslice od 1 do 1 000 000. Čísla se zapisovala kombinací potřebného počtu číslic pro jednotky, desítky, stovky atd. Číslo 42 bychom v egyptském podání psali

[2] Totéž se traduje i o dobyvateli střední Asie.

[3] Nakonec se museli spokojit jen se sádrovými odlitky a kresbami vynikajícího kreslíře Denona; originály si odvezli vítězní Angličané.

jako jedna jedna deset deset deset deset. Egypťané používali pouze tzv. *kmenné zlomky*, tedy převrácené hodnoty přirozených čísel. Počítání se zlomky bylo tedy dosti těžkopádné, neboť výsledek musel být zapsán opět jako kmenný zlomek. Aby si usnadnili práci, sestavovali tabulky, v nichž byly zlomky vyjádřeny jako součet několika zlomků kmenných, například $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

Egypťané ovládali základní aritmetické operace, přičemž násobení a dělení bylo založeno na sčítání. Jeden činitel se zdvojnásoboval tak dlouho, dokud jeho násobky nedosáhly druhého činitele, výsledky se potom sečetly. Měl-li tedy Egypťan vynásobit čísla 51 a 11 a neměl-li zrovna po ruce kalkulačku, postupoval následovně. 1x51=51, 2x51=102, 4x51=204, 8x51=408. Sečteme-li položky 1, 2 a 8, dosáhneme kýženého výsledku 561. Naproti tomu při dělení těchto dvou čísel zdvojnásobujeme dělitele tak dlouho, až dostaneme dělence. 51=44+4+2+1. Tedy 51:11=4+4/11+2/11+1/11. Umocňování a odmocňování není ve staregyptských textech příliš časté, většinou se provádí na "slušných hodnotách" a je pravděpodobné, že při těchto operacích byla využívána i geometrická znázornění. Velkou pozornost byla věnována práci s kmenovými zlomky, podrobnější popis těchto operací by přesáhl rozsah těchto skript, proto odkazujeme čtenáře na jinou literaturu, např. [Vy]. Jelikož Egypťané řešili pouze praktické úlohy, museli počtáři také bezpečně ovládat převody jednotek.

Ze zachovaných matematických textů usuzujeme, že Egypťané měli poměrně značné znalosti geometrie, zejména co se týče praktického využití, tedy výpočtů obsahů a objemů. Egypťané dovedli spočítat obsah pravoúhelníku. Trojúhelníky znali pouze rovnoramenné a jejich obsah se počítal jako obsah obdélníka se stejným obsahem. Obsah lichoběžníku počítali převedením na obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna byla stejně dlouhá jako součet délek základen lichoběžníku, tedy znali vzorec $S = \frac{(a+c).v}{2}$. Kruh bylurčován délkou poloměru a jeho obsah se počítal převedením na čtverec o přibližně stejném obsahu. Strana čtverce přitom odpovídala $\frac{8}{9}$ poloměru zadaného kruhu. Egypťané nepracovali s číslem π, výsledky k nimž dospěli odpovídají hodnotě $\pi \doteq 3,16$.

Jak dokazují pyramidy, jediný ze starověkých divů světa, který se zachoval až do dnešních dnů a který patrně budou i naši potomci dlouhou obdivovat, měli Egypťané i dobré znalosti stereometrie. Ovládali výpočet objemu jvádru a válce, kdy postupovali stejně jako se postupuje nyní, tedy obsah podstavy se násobí výškou. Uměli vypočítat i objem komolého jehlanu, avšak je zajímavé, že pro toto těleso neměli speciální název a zobrazovali je pouze ideogramem. Postup bychom dnes charakterizovali vzorcem $V = \frac{1}{3}v(a^2 + ab + b^2)$. V Rhindově papyru lze nalézt i úlohy na výpočet sklonu pyramidy. Ani ve stereometrických úlohách nenajdeme odvození postupu a na rozdíl od úloh planimetrických se nezachovala ani jednotná terminologie. Vzhledem k tomu, že nalezené matematické památky pocházejí z relativně pozdní doby, je pravděpodobné, že v nich byly zúročeny tisícileté zkušenosti egyptských inženýrů.

V dochovaných matematických textech lze nalézt i úlohy na aritmetickou a geometrickou posloupnost a praktické úlohy, mimo jiné na srovnávání kvality chleba a piva. Jiné úlohy vedou na řešení rovnic a v některých nalezneme řešení metodou falešného předpokladu. Malý výběr ze staroegyptských úloh uvádíme v následujících řádcích.

Trojúhelník, jehož výška je deset a základna čtyři. Udej mi (obsah) jeho plochy. Spočítej polovinu ze čtyř, je to dvě, pro udání jeho obdélníku. Počítej s deseti dvakrát, vyjde dvacet. To je (obsah) jeho plochy. (Moskevský papyrus, úloha 4)

Metoda výpočtu (obsahu) kruhové plochy o (průměru) 9 chet. Jaký je obsah její plochy? Odečti jednu devítinu z toho, je to jedna, zbytek je osm. Počítej s osmi osmkrát, vyjde šedesát čtyři. Toto je její obsah v ploše. 64 secat. (Rhindův papyrus, úloha 50)

Metoda výpočtu pytle s mnoha drahými kovy. Řekne-li se ti: pytel, v němž je zlato, sříbro a cín. Tento pytel může být získán za 84 šatej. Co je to, co přísluší každému kovu, když za deben zlata s dá 12 šatej, (za) stříbro to je 6 šatej a (pro) deben cínu je to 3 šatej. Sečti to, co se dá za šatej všech kovů, vyjde 21. Počítej s těmi 21 až najdeš 84 šatej. To je, za co je možné získat tento pytel. Vyjde 4. To dáš za každý kov. Postup: Počítej se čtyřmi dvanáctkrát, vyjde: zlato je 48, to je to, co mu přísluší. 6x stříbro 24, 3x cín 12. 21 celkem 84. (Rhindův papyrus, úloha 62)

Metoda výpočtu 16 měřic hornoegyptského ječmene. Převést na 100 chlebů (kvality) 20, zbytek na pivo (kvality) 2, 4, 6 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ sladu pro datle. Spočítej podíl těch chlebů (kvality) 20, vyjde 5. Spočítej zbytek ze 16 za 5, vyjde 11. Proveď dělení 1 těmi velikostmi kvalit vyjde $\frac{2}{3}\frac{1}{4}$. Počítej s $\frac{2}{3}\frac{1}{4}$ dvakrát, neboť bylo řečeno $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ sladu pro datle, vyjde 1 $\frac{2}{3}\frac{1}{6}$. Počítej s těmi $1\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ až najdeš 11, vyjde 12x. Řekni mu: toto je příslušné pivo. Nalezl jsi správně. (Moskevský papyrus, úloha 13)

K této úloze připojíme malý komentář. Je zřejmé, že na 100 chlebů kvality dvacet se spotřebuje 5 měřic ječmene. Na jeden džbán od každé kvality piva se spotřebuje $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ měřice obilí, což po přidání datlí dává $\frac{11}{6}$ měřice. Vydělením 11 měřic touto hodnotou získáme počet džbánů piva. Pozorný čtenář si zajisté všimne, že těch džbánů není dvanáct, nýbrž pouhých šest. Je tedy pravděpodobné, že autor této úlohy byl velkým milovníkem piva a v tomto případě bylo přání otcem myšlenky.

1.2 Babylónská matematika

Další významnou oblastí, kde vznikly vyspělé civilizace, byla Mezopotámie, tedy kraj mezi řekami Eufratem a Tigridem. Na rozdíl od Egypta tuto oblast obývalo postupně několik národů (Sumerové, Akkadové, Babylóňané, Asyřané), pro jednoduchost budeme mluvit o matematice babylónské, i když toto označení není úplně přesné. V této oblasti se používalo tzv. klínové písmo[4] , psalo se převážně na hliněné tabulky, které se vypalovaly, takže památek na tyto říše se zachovalo relativně mnoho. Zdá se, že babylónská matematika byla na vyšší úrovni než egyptská, alespoň dochované památky na to ukazují. Jedním z největších přínosů Babylónie bylo používání pozičního zápisu čísla, Babyloňané používali šedesátkovou soustavu, snad proto, že číslo šedesát má mnoho dělitelů. Z Babylónie pochází dělení kruhu na 360 dílů, hodiny na 60 minut a podobně. Toto dělení je tak pevně ukotveno v lidské mysli, že ani tvůrcové měrové soustavy SI, která je jinak striktně založena na

[4] Klínové písmo je nejdéle používaným písmem v historii lidstva, používalo se více než tři tisíce let.

desítkové soustavě a jednotky dělí či násobí až na výjimky po tisícinách či tisících, si netroufli hodinu rozdělit na tisíc milihodin a k tomuto dělení přistoupili až u jednotky nejmenší, tedy sekundy.

Šedesátkovou soustavu používal již nejstarší národ, který obýval Mezopotámii a tímto národem byli Sumerové. Zatímco my číslo 1011 vyjadřujeme jako $1.10^3 + 0.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0$ aniž si někdy toto uvědomujeme. Sumerové však toto číslo chápali jako $16.60^1 + 51.60^0$. Sumerové však neznali nulu, a to ani jako symbol pro prázdné místo. Stejně tak postupovaly i další národy, které přišly do krajiny mezi Eufratem a Tigridem. Počtář tedy musel poznat pouze z kontextu úlohy, které číslo ten který zápis vyjadřuje. Teprve ke konci babylonské éry lze nalézt zápis čísla, kdy je na místě nuly speciální znak. Babylóňané byli skvělými počtáři, tabulka YBC 7289 z období známého panovníka Chamurapiho (asi 1700 př.Kr.) obsahuje výpočet $\sqrt{2}$ s přesností na milóntiny. Pro usnadnění výpočtů si podobně jako Egypťané pomáhali různými tabulkami. Tak například tzv. Plimptonská tabulka č. 322 obsahuje řadu pythagorejských trojic.

Babylóňané byli také experty na řešení rovnic jednotlivých a jejich soustav. Řešení lineárních rovnic bylo samozřejmostí, troufli si však i na rovnice kvadratické a některé typy rovnic kubických. Jelikož neznali symboliku, museli popisovat jednotlivé operace slovně. Stejně tak neuznávali záporná čísla, proto museli rovnice zadat tak, aby obsahovaly pouze kladná čísla a záporná řešení ignorovali. Jako ukázku si uvedeme řešení rovnice $x^2 + x = 0,75$. Levá strana byla doplněna na čtverec $(x + 0,5)^2 = 1$, z toho pak plyne $x + 0,5 = 1$ a $x = 0,5$. Druhý kořen $x = -1,5$ je záporný a ten nehledali, ačkoliv by se snadno tímto postupem našel $(x + 0,5 = -1 \Rightarrow x = -1,5)$.

Zajímavou úlohu lze nalézt na tabulce VAT 8398. *Z (1) bur (4) gur obilí jsem sklidil. Z jednoho druhého bur (3) gur obilí jsem sklidil. Obilí nad obilí o o (8,20) převyšuje. Moje pole přičteno a (30,0)dává. Moje pole jsou co?* Tato úloha je psána poněkud šroubovaně, obsahuje různé jednotky, jejihž převody Babylóňané dobře ovládali (narozdíl od nás), čísla jsou vyjádřena v šedesátkové soustavě. Pro lepší pochopení babylónského postupu úlohu přeformulujeme. *Zedníkům byla přivezena basa lahvových piv. Kvasary stojí 15 Kč, Veleny 12 Kč. Celkem jsme zaplatili 276 Kč (bez zálohy). Kolik je kterých?* Babylóňan předpokládal, že obou druhů byl stejný počet, v tom případě bychom zaplatili $10.15 + 10.12 = 270$ Kč. je tedy jasné, že Kvasarů je více, přičemž si uvědomil, že záměnou Velena za Kvasar se zvedne cena nákupu o 3 Kč. Stačí tedy rozdíl mezi skutečnou a hypotetickou cenou vydělit třemi a hned víme, že Kvasarů bylo dvanáct a Velenů osm. Dnes se podobné úlohy řeší pomocí soustav dvou rovnic o dvou neznámých, *metoda falešného předpokladu* je však podle autorova názoru tou nejpřirozenější a je škoda, že v současných učebnicích není zmiňována. Není přece problém zaměnit piva za limonády, které černohorský pivovar také vyrábí, či za jiný, pro děti vhodný artikl, popřípadě pro zvýšení ekonomických znalostí původní úloh převést na současné jednotky.

Babylóňané ovládali vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu, rozdíl čtverců, součet prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem 2 a součet prvních n druhých mocnin přirozených čísel, i když formulace měli k dispozici slovní návod na tyto výpočty by asi byla přesnější. Výše zmíněná plimptonská tabulka dokazuje, že uměli konstruovat pythagorejské trojice a znali též geometrickou interpretaci těchto čísel. Ve znalostech geometrie však za Egypťany poněkud zaostávali, alespoň dosavadní nálezy svědčí o tom, že uměli určit obsah trojúhelníku a lichoběžníku a znali přibližné návody na výpočet objemu válce, kužele a komolého jehlanu. Národy žijící v Mezopotámii však budovali své stavby z pálených cihel a tyto se až na základy do dnešních dob nezachovaly.

Kapitola 2

Matematika v antickém Řecku

Řecké kmeny v několika vlnách osídlily nejen dnešní Řecko, ale také ostrovy v Egejském moři a také pobřeží Malé Asie. Právě ve městech na maloasijském pobřeží můžeme nalézt počátky řecké a tím pádem i evropské vědy. Teprve od těchto dob můžeme mluvit o matematice, teprve Řekové začali dělat matematiku tak jak ji známe dnes. Zatímco dříve byly řešeny pouze konkrétní úlohy, Řekové začali budovat matematiku jako abstraktní vědu, své poznatky začali zobecňovat a dokazovat. Matematika egyptská i babylónská byla pro nás v ,podstatě anonymní, ačkoliv známe nějaká jména, tak teprve z Řecka známe jména mužů, které můžeme označit za matematiky v dnešním slova smyslu. A jsou to jména, která zná skoro každý. i když se matematikou nezabývá. Jména jako Archimédes, Eukleides, Pýthágorás, Tháles a další jsou dnes všeobecně známa. O jejich životě a hlavně díle bude zmínka především v druhé části těchto skript, v krátké přehledu vývoje matematiky však výsledky jejich práce nemohou chybět.

2.1 Figurální čísla

Patrně se již nedozvíme, proč se v Řecku tak výrazně změnil charakter matematiky od řešení konkrétních úloh k abstraktní vědě. Podle některých badatelů tomu mohly napomoci *figurální čísla*. Přirozené číslo totiž můžeme vizualizovat více způsoby, jedním z nich je i pomocí kamínků. Kaménky je možné uspořádat do obrazců—takto vzniklé uspořádání nazýváme figurální čísla (trojúhelníková, obdélníková, čtvercová, pětiúhelníková ap.) Třebas to byl bývalý voják či tělocvikář, koho napadlo seřadit kaménky do dvojstupu a zjistil, že někdy je tvar uzavřený (čísla sudá), jindy je neuzavřený (čísla lichá). Stejný výsledek obdržíme, vytvoříme-li ze dvou dvojstupů jeden, přitom však vůbec nezáleží na tom, kolik členů mají jednotlivé zástupy, ale výhradně na tom, jsou-li původní útvary uzavřené či nikoliv. Narodila se tak první matematická věta a současně byla též dokázána. Na druhé straně mám pochybnosti, zda tento objev byl důležitý pro lidi z praxe, ať již to byl stavitel či obchodník s olivami.

Trojúhelníková figurální čísla se dají vyjádřit vzorcem $a = \frac{1}{2}n(n+1)$, což je také vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, v níž $a_1 = 1$ a

$d = 1$. Čtvercová figurální čísla jsou dána vzorcem $a = n^2$. Podíváme-li se na jejich praktickou konstrukci, pak vidíme, že první je určeno jedním kamínkem. Abychom dostali druhé, musíme ve vodorovném směru přidat dva kamínky a ve svislém jeden, tedy celkem tři. Při konstrukci třetího pak ve vodorovném směru přidáme tři a ve svislém dva, celkem pět atd. Tento postup je vlastně vizualizace vzorce

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

neboli slovy součet n lichých čísel se rovná n^2.

2.2 Souměřitelnost, objev iracionality

Již ze starořeckých bájí můžeme usoudit, že Helénové byli národ hudbymilovný a možná právě hudba inspirovala Pýthágora a jeho žáky k vytvoření jejich zvláštního filozofického směru. Pýthagorejci si totiž povšimli, že tóny vytvořené dvěma strunami znějí libozvučně právě tehdy, když jejich délky jsou v poměru malých celých čísel. Zmáčkneme-li druhou strunu přesně v polovině, obdržíme oktávu (2 : 1), zkrácením struny na dvě třetiny získáme kvintu (3 : 2), kvartě odpovídá poměr (4 : 3) atd. Proč tedy hledat základ světa v ohni, vodě či neurčitém apéironu, když tu máme číslo. Základem jsoucna je číslo (arithmos), jedině číslo nám umožní popsat kvantitativní vztahy věcí a jevů. A tak jako hudba je uchu lahodící když jsou délky strun v poměru malých celých čísel, tak i svět musí být krásný, budeme-li ho moci vyjádřit obdobným způsobem.

Podle jejich představ byl ve středu vesmíru centrální oheň, kolem něhož obíhají na jednotlivých sférách Země, Měsíc, Slunce, jednotlivé planety a hvězdy. Jelikož Řekové znali pouze pět planet, bylo nutno vymyslet ještě Protizemi, aby sfér, po nichž nebeská tělesa obíhají, bylo deset. Desítka byla pro pýthagorejce symbolem dokonalosti, proto by nepřenesli přes srdce, kdyby mělo být sfér pouze devět. Je samozřejmé, že sféry byly kulové, jejich poloměry v poměru malých celých čísel a pohyb nebeských těles rovnoměrný. Tak jako při pohybu struny či při chvění vzduchového sloupce vzniká hudba, tak i při pohybu nebeských těles musela podle pýthagorejských představ vznikat hudba, nádherná, dokonalá, kterou mohli vnímat jen velcí duchové, neboť tato hudba může být vnímána pouze rozumem. Řecké slovo kosmeo znamená krásný, proto název kosmos a ze stejného slovního základu máme i slovo kosmetika.

Jedničku nepovažovali za číslo, nýbrž za základní stavební kámen aritmetiky. Přirozená čísla byla součtem určitého počtu jednotek, sudá čísla byla ženská, lichá mužská. Racionální čísla byla představována jako poměry přirozených čísel. Každá dvě čísla byla souměřitelná, tedy vždy existovalo nejmenší číslo, které dělilo obě původní čísla. Tato pohoda však nepanovala dlouho, neboť přišel objev iracionality (nesouměřitelnosti) a pýthagorejcům se zhroutil svět. Bylo zakázáno tento objev zveřejnit, leč šídlo v pytli neutajíš a o iracionalitě se brzy dozvěděli i lidé mimo jejich komunitu. Hippas z Metapontu, který měl tento objev zveřejnit, byl podle některých legend zabit, podle jiných se zabil sám, podle ještě jiných byl dokonce potrestán bohy.

Důkaz, že odmocnina ze dvou je číslo iracionální patří dnes ke školským případům aplikace důkazu sporem. Pokud by $\sqrt{2}$ byla číslo racionální, bylo by možné ji psát ve tvaru zlomku, tedy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, přičemž $(p,q) = 1$. Po umocnění a úpravě máme $p^2 = 2q^2$, tedy p^2 je sudé a proto i p je sudé, tedy lze je psát ve tvaru $p = 2k$ a po dosazení do předchozí rovnice obdržíme, že i číslo q je sudé, což je spor s předpokladem, že čísla p a q jsou nesoudělná. Tento důkaz je jednoduchý, avšak Řekové pravděpodobně na iracionalitu $\sqrt{2}$ přišli jiným způsobem; dvě nejpravděpodobnější hypotézy uvádíme v následujících odstavcích.

Mějme čtverec, jehož strana měří a jednotek a úhlopříčka u jednotek. Alespoň jedno z těchto čísel je liché, protože kdyby byla obě sudá, mohli bychom volit dvojnásobnou jednotku. Podle Pýthagorovy věty platí $u^2 = a^2 + a^2$ a číslo u^2 je tedy sudé, proto je také u sudé, proto celým počtem jednotek můžeme změřit i polovinu úhlopříčky. Opětovné použití Pýthagorovy věty dává $a^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2$ a tedy i a je číslo sudé, což je spor s předpokladem. Tento důkaz je v podstatě geometrickou modifikací důkazu uvedeného výše.

Pýthagorejci měli v oblibě pravidelný pětiúhelník, jemuž připisovali magicou moc. Máme-li sestrojit pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, stačí sestrojit rovnoramenný trojúhelník ABC, zbývající body se snadno naleznou. Jelikož podle pýthagorejců měly každé dvě úsečky společnou míru, dá se předpokládat, že tuto společnou míru hledali. Snadno se však ukáže, že pokud taková úsečka existuje, tak je rovněž společnou mírou pentagonu $A_1B_1C_1D_1E_1$, jehož vrcholy jsou průsečíky úhlopříček pětiúhelníku původního. Stejným postupem můžeme vytvářet stále menší a menší pětiúhelníčky, jejichž strana a úhlopříčka mají tutéž společnou míru jako pentagram původní. To však není možné, proto předpoklad o souměřitelnosti strany a úhlopříčky je špatný a musíme přijmout opačný závěr že tyto dvě úsečky jsou nesouměřitelné.

S iracionálními čísly jsou propojeny i tři slavné úlohy, o jejichž přesné řešení se Řekové marně pokoušeli. První z těchto úloh je *zdvojení krychle*. K této úloze se váže následující legenda: Na ostrově Délos vypukla morová epidemie a protože nepřestávala, vyslali Délští poselstvo do delfské věštírny s prosbou o radu. Odpověď byla jednoduchá—je třeba zdvojit podstavec sochy boha Apollóna, který byl celý ze zlata a měl tvar krychle. Podmínkou bylo, aby i nový oltář měl krychlový tvar a nutno říci, že si Délané s tímto problémem neporadili. Bohové však zřejmě ocenili alespoň snahu, protože morová epidemie nakonec ustala.

Dalším problémem je *kvadratura kruhu*, jinými slovy sestrojit čtverec o stejném obsahu jako daný kruh. Zatímco kvadratura obdélníka je záležitost snadná, stačí využít např. Eukleidovu větu o výšce $v^2 = c_a \cdot c_b$ a sestrojit pravoúhlý trojúhelník s přeponou $c_a + c_b$ a výška tohoto obdélníka je stranou hledaného čtverce, najít konstrukci pro kružnici se nedařilo. Jako kvadratura kruhu se dnes v literatuře či v novinářském jazyce označuje velmi těžce řešitelný problém.

Třetím problémem je *trisekce úhlu*, jinými slovy rozdělit za použití kružítka a pravítka úhel na tři stejné díly. Bisekce čili rozpůlení úhlu je úloha tak snadná, že by ji měli ovládat už žáci základních škol, rozdělení úhlu na tři úhly stejné velikosti se nedařilo. Někdy se k těmto úlohám přidává ještě *rektifikace kružnice*, tedy nalezení úsečky stejné délky jako obvod kružnice a *konstrukce providelných mnohoúhelníků*. Všechny tyto úlohy musely být řešeny tzv. euklidovskou konstrukcí, tedy kružítkem a pravítkem, čili konstrukcí konečného počtu přímek a kružnic. Dnes již víme, že tyto úlohy takto nelze řešit, neboť číslo π je transcendentní, jinými slovy jedná se o iracionální číslo které není kořenem algebraické rovnice.

2.3 Základy

O životě Eukleidově toho dnes moc nevíme, ale jeho dílo *Stoichea*, česky *Základy* mu zajistilo nesmrtelnost. Říká se, že se jedná o druhou nejvydávanější knihu v dějinách lidstva vůbec a jelikož na prvním místě máme Písmo svaté, tak v kategorii vědeckých publikací či učebnic toto dílo bezkonkurenčně vede. Eukleides v tomto díle soustředil veškeré matematické vědění tehdejšího Řecka. Toto dílo je složeno z 13 knih, jejich výčet a charakteristiku lze nalézt např. v [Eu]. Jistý paradox můžeme nalézt v tom, že ač jsou Základy nejčtenější matemtickou knihou historie, tak je lze současně označit také jako knihu nejméně čtivou. Základy jsou totiž složeny výhradně z definic, axiomů, tvrzení a lemat, přičemž každá věta je zde dokázána. Nenalezneme zde žádné příklady, ať již motivační nebo vysvětlující, žádný spojovací text či komentáře, ty pocházejí až z per dalších matematiků a umožňijí čtenáři snazší pochopení textu.

Jelikož partie, které se týkají geometrie jsou poměrně často citovány včetně proslulých pěti Eukleidových axiomů (ty uvedeme v kapitole pojednávající o 19. století), podívejme se raději na aritmetickou část Základů, tedy na knihy sedmou, osmou a devátou. Na úvod sedmé knihy uvádí Eukleides dvacet dva definic a začíná tím, že definuje jedničku a (přirozené) číslo (D7/1 a D7/2). Jedničku tedy nepovažuje za číslo, nýbrž za základní stavební kámen čísla. Můžeme tak soudit z toho, že Eukleides znázorňuje čísla jako úsečky; jedničku tedy představuje základní úsečka a např. číslo pět je tvořeno pěti stejnými úsečkami poskládanými za sebou. Toto pojetí činí pak některé důkazy těžkopádnými, pokusy chápat jedničku jako každé jiné číslo, nebyly úspěšné.[1] Čtenář, který se domnívá, že něco podobného již v této knize četl, se nemýlí, tuto část převzal Eukeides od pyhtagorejců.

Nyní si dovolíme malou odbočku, když odcitujeme několik vět z učebnice [Sm1], která byla vydána zhruba před 150 lety. *Číslo (numerus, die Zahl)jest více stejných předmětů. Onen stejný předmět, jenž v čísle přichází, nazýváme jednost. V čísle 7 krejcarů jest jednost krejcar, v čísle deset koní jest tím kůň a v čísle pět set jest tím sto.* Tento citát ukazuje, že i páter Šimerka psal svoji učebnici v eukleidovském duchu a na druhou stranu nám tento příklad přibližuje uvažování řeckých matematiků.

Vraťme se však opět k Základům: Další definice se týkají běžných pojmů, jako čísla sudá a lichá, prvočíslo a číslo složené, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel, úměra ap. Poslední, dvaadvacátá definice pak definuje *dokonalé číslo*, jímž se rozumí to číslo, které je rovno součtu všech svých částí (rozuměj dělitelů menších než je číslo samo). Kniha pak pokračuje třicetideváti tvrzeními, které se týkají dělitelnosti přirozených čísel. Nalezneme zde i známý Eukleidův algoritmus, byť ne v takové formě v jaké ho známe dnes. Tvrzení 1/7: *Jsou dána dvě různá čísla a je-li nepřetržitě menší odečítáno od většího a jestliže číslo, které*

[1] Např. stoický filosof Chrysippos (280–207) př. Kr.

zůstane, nikdy nedělí předchozí a jestliže odčítáme tak dlouho, dokud nezbude jednička, pak původní dvě čísla jsou nesoudělná.

Je-li např. $a_1 = 19$ a $a_2 = 7$, pak podle Eukleida musíme postupovat následovně: 19-7=12, 12-7=5, 7-5=2, 5-2=3, 3-2=1. Zkrácení algoritmu do současné podoby pomocí dělení je zřejmé, důkaz je pak snadný, neboť stačí využít skutečnosti, že z předpokladu $b|a_1 \wedge b|a_2$ plyne $b|(a_1 - a_2)$. Tak budeme pokračovat tak dlouho, až dojdeme ke sporu, že $b|1$. Jen pro zajímavost dodáváme, že ačkoliv je toto tvrzení obecné, Eukleidův důkaz je dělán jen na tři odečítání. Stejně ovšem jsou dokazována i ostatní obecná tvrzení.

Kniha osmá obsahuje 27 tvrzení, které se týkají spojitých úměr nebo chcete-li konečných geometrických posloupností. Jako ukázku uvedeme tvrzení22/8: *Jsou-li tři čísla spojitě úměrná a první je čtverec, pak i třetí je čtverec.* Důkaz tohoto tvrzení je snadný, neboť platí $a_2 = ka_1$, $a_3 = ka_2 = kk^2a_1$.

Kniha devátá se týká teorie parity a prvočísel. Najdeme zde již uvedená tvrzení, týkající se parity součtu či násobku čísel. Např. ve větě 22/9 se tvrdí: *Sečteme-li určitý počet lichých čísel a tento počet je číslo sudé, pak i součet je číslo sudé.* Důkaz je proveden tak, že se vezmou čtyři lichá čísla, od každého je odečtena jednička, čímž obdržíme čísla sudá. Jejich součet je číslo sudé, přičtením čtyř jedniček se na paritě nic nezmění.

V tvrzení 20/9 se říká: *Prvočísel je více než víc než jakékoliv množství prvočísel.* Důkaz je proveden sporem, Eukleides vezme tři prvočísla, najde jejich nejmenší společný násobek a přičte k němu jedničku. Takto vzniklé číslo je buď prvočíslo (to by bylo ale čtvrté) nebo složené. Nemůže však být dělitelné ani jedním z předchozích—na jedno jsme tedy zapomněli. Řekové neznali pojem nekonečno, chápali je jen jako nekonečno potenciální, tedy ve smyslu, že daný počet mohu navyšovat. Ostatně ani v části geometrické neuvádí, že přímka je nekonečně dlouhá, ale tvrdí že úsečku (přímku) lze neomezeně prodlužovat za oba krajní body.

Věta 35/9 je v podstatě vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. *Nechť je dáno jakékoliv množství čísel, která jsou spojitě úměrná. Odečtěme první číslo od druhého a od posledního. Potom přebytek druhého k prvnímu je stejný jako přebytek posledního k součtu všech předchozích.* Tato poněkud krkolomná formulace neříká nic jiného, než že platí $\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$. Odvození známého vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti je pak již hračkou.

Poslední věta této knihy (36/9) zní takto: *Mějme libovolné množství čísel počínaje jedničkou, která jsou spojitě úměrná s quocientem dva a sčítejme je tak dlouho, dokud nebude součet prvočíslo. Vynásobíme-li tento součet posledním, pak součin je číslo dokonalé.* Eukleides zde uvádí postačující podmínku pro to, aby číslo tvaru $(2^n - 1).2^{n-1}$ bylo dokonalé. Dá se dokázat, že tato podmínka je současně i podmínkou nutnou. Čísla $2^2 - 1$ se nazývají čísla *Mersennova*, v současné době je známo asi 40, která jsou prvočísla a hledání Mersennových prvočísel je v současné době velkým hitem mezi matematiky-amatéry.

Závěrem této části si dovolím malé zamyšlení na téma Eukleides a současný svět. Eukleidovy základy vycházejí z názorů dvou významných antických filozofů. Prvním z nich je Platón[2] a jeho idealistická filozofie, která rozlišuje dva světy. ten

[2] Platón (427/8–347 př. Kr.), řecký idealistický filozof, založil školu nazvanou Akademie.

reálný, v němž žijeme a dále transcendentní svět ideí. V našem světě jsou lidé, zvířata, rostliny a věci, které poznáváme svými smysly. Tyto vznikají, v průběhu času se mění, nakonec zanikají. Třesoucí se ratlík je pes stejně jako doga. Odpojíme-li ve stanici několik vagónů, to co ze stanice vyjede, bude zase vlak. Transcendentní svět však můžeme poznat poze rozumem, tento svět je dokonalý a jediný skutečný, ovládaný ideou Dobra. V tomto světě existuje jeden pes a jeden vlak. Idea vlaku či psa se nerodí a neumírá, neodráží v sobě nic jiného a také se na nic jiného nemění. Idea psa je samozřejmě obsažena ve všech pejscích, kteří pobíhají po zemi, stejně jako idea vlaku je obsažena ve všech vlacích, které se kdy po kolejích pohybovaly, pohybují a pohybovati budou. Idea však není konkrétními realizacemi nikterak ovlivněna.

Stejně je tomu tak i v Základech. Definice 1 praví: *Bod je to, co nemá části.* Definice 2 nám říká, že: *Čára je délka bez šířky.* Jenže i kdybychom si ořezali tužku na ořezávátku vybaveném nejmodernější technikou, tak i s takto ořezanou tužkou námi kreslené body budou flíčky a narýsovaná čára jsouce patřičně zvětšena nám bude připomínat autostrádu. Jak by řekl Vlasta Burian, geometrie se nám abstrouhala[3] od reálné skutečnosti. Problémy geometrické řešíme rozumem a potom je více či méně věrně realizujeme na papíře. Nebude tedy náhoda, měl-li Platón na vstupních dveřích své Akademie nápis *Nevstupuj, kdo neznáš geometrii.*

Druhým je Aristoteles ze Stageiry[4], zakladatel logiky. Podle něho je třeba věnovat velkou pozornost definicím pojmů, neboť lidé se domlouvají právě pomocí pojmů. Cesta poznání principů vede od jednotlivého ke všeobecnému a nazývá se indukce. tyto principy je potom nutno zdůvodnit úsudkem neboli dedukcí. Pokud se ukáže, že nový princip je důsledkem principů již ověřených, udělali jsme důkaz. Ne každé tvrzení lze dokázat, takovým tvrzením říkáme axiomy. Základy mají logickou výstavbu v tomto duchu a na stejném principu jsou založeny i další matematické teorie.

2.4 Matematika praktická

Z předchozích řádků by se mohl zdát, že řečtí vědci řešili pouze úlohy teoretické v klidu svých pracoven. Řekové však byli zdatnými námořníky, o čemž svědčí jednak jejich báje (Argonauté, Odysseia ap.), jednak fakt, že se jim podařilo kolonizovat valnou část Středomoří. Sedm bylo divů starověku, tak jak je uváděl Filón, z toho pět bylo na území obývaném Řeky a nejméně tři (Artemidin chrám v Efesu, mauzoleum v Halikarnassu a maják na ostrově Faru) byly především divy architektonickými. Už tyto skutečnosti svědčí o tom, že dovedli používat matematické znalosti také v praxi.

Řekneme-li dnes náhodnému kolemjdoucímu jméno Archimédes, tak se pravděpodobně vybaví těleso ponořené do kapaliny a z toho usoudí, že se jednalo o fyzika. Pokud bereme dnešní rozdělení vědy, tak s tímto tvrzením lze jistě souhlasit, nesmíme však zapomenout na to, že Archimédes byl i skvělý inženýr a z

[3] Zde musíme krále komiků opravit, správně má být abstrahovala.

[4] Aristoteles (384–322 př. Kr.), vedoucí osobnost Lýkeia, polyhystor s velkým smyslem pro metodiku vědeckého zkoumání.

díla, které se do dnešního dne zachovalo, je jasné, že ho můžeme označit také jako matematika. V každém případě lze říci, že Archimédes byl nejvýznamnějším vědcem starověku. S jeho jménem se setkávají žáci již od základní školy, proto o jeho některých objevech pojednáme podrobněji.

Zatímco výpočet obvodu či obsahu pravidelných mnohoúhelníků nečiní žádných potíží, tak stanovení vzorců pro obvod kružnice či obsahu kruhu již není zdaleka jednoduché a vyžaduje to od učitelů značného důvtipu, aby žáci vzorce pochopili, neboť zatím nemají k dispozici patřičný aparát. Určitě by však stálo za to, vrátit se po probrání goniometrických funkcí k této problematice a pokusit se odvodit vzorce podobným způsobem, jakým to udělal před mnoha staletími Archimédes.

Archimédova metoda vychází z *Eudoxova exhaustačního principu*, jenž může být formulován takto: Nechť l je délka kružnice, l_n je délka pravidelného $n-$úhelníku této kružnici vepsaného. Pak ke každému $k > 0$ existuje n takové, že $l - l_n < k$. Podobným způsobem lze tento princip zformulovat i pro délku kružnice a pravidelného n -úhelníka této kružnici opsaného a podobným způsobem můžeme postupovat i pro obsah kruhu a n-úhelníků kruhu opsaných či vepsaných.

Mějme tedy kružnici o průměru d a ptejme se, jakým číslem musíme vynásobit průměr, abychom dostali délku. Označíme-li hledáné číslo symbolem π, potom obdržíme $l = \pi d$. Pro obvod pravidelného n-úhelníka kružnici vepsaného lze snadno odvodit vzorec

$$l_n = nd \sin \frac{360^\circ}{2n} \tag{2.1}$$

. Porovnáním obou vzorců dostaneme dolní odhad čísla π, a sice $\pi > n \sin \frac{360^\circ}{2n}$. Podobně lze odvodit horní hranici, neboť obvod pravidelného n-úhelníku kružnici opsaného je

$$L_n = nd \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n} \tag{2.2}$$

a platí tedy $\pi < n \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n}$. Spojením těchto podmínek obdržíme omezení pro číslo π, které je dáno následující nerovností

$$n \sin \frac{360^\circ}{2n} < \pi < n \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n}. \tag{2.3}$$

Z těchto úvah je zřejmé, že se nám tímto způsobem nikdy nepodaří stanovit přesnou hodnotu čísla π. Pro praktické výpočty však stačí znát jen přibližnou hodnotu této konstanty. Stačí si tedy stanovit tuto přesnost k a počítat hodnoty obou odhadů tak dlouho, až obdržíme $L_n - l_n < k$. Pokud tyto hodnoty nepočítáme pomocí počítače ale jen s kalkulátorem, stačí vyjít z určité hodnoty n a počet stran zdvojnásobovat tak dlouho, až platí požadovaná nerovnost.

Obdobným způsobem můžeme postupovat i při stanovení konstanty, kterou je nutno vynásobit druhou mocninu průměru (poloměru), abychom dostali obsah kruhu. Z praktických důvodů budeme hledat číslo, kterým je nutno vynásobit druhou mocninu poloměru a toto číslo označíme opět π. Pro obsah $n-$úhelníka kružnici vepsaného lze snadno odvodit vzorec

$$p_n = nr^2 \sin \frac{360^\circ}{2n} \cos \frac{360^\circ}{2n} = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n} \tag{2.4}$$

. Obsah n-úhelníka opsaného je zase dán vzorcem

$$P_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n} \tag{2.5}$$

. Pro omezení čísla π tedy máme vztah

$$n \sin \frac{360^\circ}{n} < \pi < n \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n} \tag{2.6}$$

a pro stanovení čísla π postupujeme obdobně jako předtím.

Archimedes vycházel z pravidelného šestiúhelníku a výpočet zastavil při pravidelném šestadevadesátiúhelníku. Obvykle se se uvádí, že používal hodnotu $\pi = \frac{22}{7}$, což je v naprostém souladu s dnes běžně používanou hodnotou $\pi \doteq 3,14$, kterážto hodnota je naprosto postačující pro technickou praxi.

Archimédes se rovněž zabýval kvadraturou paraboly, tedy výpočtem obsahu pravoúhlého trojúkelníka, jehož přeponu nahradíme parabolou $y = x^2$. V jednom ze způsobu dovedně využil svých znalostí mechaniky. Při osvětlení jeho metody budeme pro snazší pochopení používat současnou symboliku. Mějme tedy páku, kterou ztotožníme s osou x a která bude mít střed otáčení v počátku souřadné soustavy. Nalevo umístíme rovnoramenný trojúhelník, jehož strany budou $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$ a $x = -1$. Na pravou stranu pak dáme parabolu $y = x^2$, kde $x \in [0; 1]$. Vezmeme-li libovolné x_0 z tohoto intervalu, pak i příčka trojúhelníka má tutéž délku a moment síly bude $M = x_0 \cdot x_0 \varrho g$. Aby nastala rovnováha, musíme vzít příčku i trojúhelníku na pravé straně a umístit ji do bodu $x = 1$. Celý trojúhelník na straně levé tedy můžeme vyvážit tak, že všechny příčky trojúhelníku na pravé straně soustředíme do bodu $x = 1$. Jelikož hustota a tíhové zrychlení se vykrátí a trojúhelník můžeme nahradit hmotným bodem umístěným v jeho těžišti, obdržíme rovnici

$$P(x) \cdot 1 = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{3}x \Rightarrow P(x) = \frac{1}{3}x^2.$$

Toto ovšem není jediný způsob, jak provést kvadraturu paraboly. Archimédes také pro tento případ využil exhaustační metodu a vyplňoval plochu pod parabolou trojúhelníky, viz [Zn]. Kromě kvadratury paraboly odvodil vzorce pro výpočet objemu a povrchu válce a koule. Zabýval se i problematikou koule vepsané do rovnostranného válce a zjistil, že poměry objemů a povrchů těchto těles jsou 2 : 3. I tuto zajímavost lze snadno odvodit při probírání tématu objemy a povrchy těles již na základní škole. Když byl Cicero správcem na Sicílii, tak našel Archimédův hrob a zjistil, že na jeho pomníku byla vytesána právě koule vepsaná do válce, tak si zřejmě tento geniální muž cenil svého objevu. Zlé jazyky tvrdí, že tento Ciceronův objev patří k tomu nejvýznamnějšímu, čím Římané přispěli k rozvoji matematiky.

Závěrem této části si opět dovolíme trochu zafilozofovat. Zatímco Eukleidův přístup můžeme označit jako statický a čistě intelektuální, lze Archimédovy metody označit jako dynamické a inženýrské (praktické). Bylo by asi dost odvážné tvrdit, že Archimédes používal při svých úvahách infimitezimální počet, základní myšlenky tohoto odvětví matematiky však v jeho díle nalezneme. Tento Syrakusan dokázal také matematiku uvádět do praxe, jak jsme již naznačili a snad právě proto si vysloužil velký obdiv autora knihy [?]. Zde se lze s autorem tohota díla ztotožnit, nesouhlasíme však s jeho zatracováním těch vědců, kteří patřili ke směru prvnímu. Domníváme se, že i eukleidovské konstrukce mají své místo ve výuce matematiky, i když patrně málokdo bude v životě konstruovat trojúhelník určený stranou a výškou a těžnicí na tuto stranu. Právě tyto konstrukce, stejně jako důkazové úlohy ap. mají nezastupitelný význam pro rozvoj logického myšlení.

Kapitola 3

Matematika ve středověku

Roku 476 byl sesazen poslední císař západořímské říše Romulus. Je paradoxem dějin, že se jmenoval stejně jako mytologický zakladatel Říma, pro jeho bezvýznamnost mu dali dějepisci přízvisko Augustulus (císaříček). Toto datum bývá označováno jako přelom mezi starověkem a středověkem, ačkoliv východní polovina římského impéria se pod údery barbarů nezhroutila a trvala ještě dalších téměř tisíc let. Na troskách říše západořímské vznikaly a zanikaly říše různých germánských kmenů. Nejvýznamnější a také nejstabilnější státní útvar založili Frankové, jejichž říše se stala základem dvou současných evropských velmocí—Francie a Německa. Nejvýznamnějším a také nejznámějším franským panovníkem byl Karel Veliký, který pochopil význam vzdělání a na jehož dvoře žil učený mnich Alcuin. Karlova říše sice dlouho nepřežila svého tvůrce, byla však základem pro vznik dnešních evropských velmocí Francie a Německa.

3.1 Alcuin a druzí

Dostane-li se nám do rukou nějaká publikace zabývající se rekreační matematikou, můžeme s vysokou pravděpodobností očekávat, že tam bude i následující oříšek: *Nějaký muž měl převézt přes řeku vlka a kozu a hlávku zelí a nemohl najít jinou loďku než takovou, která byla schopna uvézt jen dva z nich. Bylo mu však nařízeno, že má všechny převézt nepoškozené. Řekni kdo můžeš, jak je nepoškozené mohl převésti.*

Tato úloha je stará již zhruba tisíc dvě stě let a myslím, že stále pobaví a kdo ji nezná, musí chvíli přemýšlet, než ji vyřeší. Poprvé byla uvedena v knize *Propositiones ad acuentos iuvenes*, což bychom do mateřštiny mohli přeložit jako Úlohy pro bystření mladíků, za jejíhož autora je považován právě Alcuin. Kromě této úlohy zde nalezneme ještě tři další, ostatně Alcuin je historiky matematiky považován za vynálezce tohoto typu úloh. Uvedeme ještě jednu úlohu, která není tak známa. *Byli tři přátelé a každý z nich měl sestru a měli se přepravit přes řeku. Každý z nich pocítil touhu po sestře svých přátel. Když přišli k řece, nalezli jen malou loďku, v níž se nemohli přepravit více než dva současně. Řekni, kdo můžeš, jak se přepravili přes řeku, aniž by jediná z nich byla poskvrněna.* Z řešení uvedeného problému samotným Alcuinem vyplývá, že čest dívky by byla poskvrněna v případě, že by byla o samotě s jiným mužem bez přítomnosti bratra. Z této úlohy vyplývá, že požadavky na morálku žen byly v době Alcuinově na jiné úrovni než v dnešní době.

Před několika lety se k autorovi dostala úloha, jež je analogická k předchozí a která má být údajně používána v Japonsku jako test inteligence při přijímání do zaměstnání. Doba na vyřešení je půl hodiny a protože autor stále působí v Brně je jasné, že ji do půl hodiny nevyřešil. Řešení však úloha má. *Přes řeku se mají přepravit otec se dvěma syny, matka se dvěma dcerami a policista se zadrženým. K dispozici mají loďku pro dvě osoby, kterou však může řídit pouze dospělá osoba. Synové nemohou být sami v přítomnosti matky, dcery zase v přítomnosti otce. Zatčený nesmí být o samotě s žádným členem rodiny, kupodivu neuteče, není-li pod dohledem policisty.* Franští mladíci si ovšem nebystřili rozum jen úlohami o převážení, nýbrž i jinými. Známý monolog Vlasty Buriana o příbuzenských zmatcích (obdobným bavil publikum už Jindřich Mošna) má svůj předobraz v jedné úloze z Alcuina která zní: *Jestliže otec a syn uvedou do manželství pozůstalou vdovu a její dceru a to tak, že syn si vezme vdovu a otec dceru, řekni, ptám se, jakým příbuzenstvím budou spojeni synové, kteří by jimi byli zplozeni.*

Převážná část této sbírky je však věnována úlohám matematickým. Nalezneme zde úlohy na rovnici o jedné neznámé, úlohy geometrické, úlohy na převádění jednotek a také úlohy na posloupnosti a úlohy na diofantické rovnice jakož i úlohy kombinatorické. Většina těchto úloh je obdobná jako ty z dnešních učebnic, pouze způsob zadání je mnohem květnatější, než dnešní stroze formulované úlohy. Uvědomíme-li si, že v 8. století nebyla k dispozici alegebraická notace tak jak ji známe dnes, musíme uznat, že řešení slovních úloh byl od tehdejších žáků docela dobrý výkon. Je však docela dobře možné, že kdyby stroj času přenesl tehdejší studenty do 21. století, tak by také naše postupy nepochopili a divili by se, jak komplikovaně tak snadné úlohy řešíme.

Alcuin nebyl jediným autorem, jehož sbírka úloh se zachovala. Čtyři středověké úlohy jsou připisovány Bedovi ctihodnému, čtvrtá je zajímavá tím, že se v ní mluví o záporných číslech. Pravděpodobně z Byzance čtvrtého století pochází sbírka úloh, jež je připisována řeckému básníku Metrodorovi, neboť jsou uveřejněny v jeho Palatinské antologii. Je ovšem možné, že úlohy samotné pocházejí od jiného autora a Metrodoros je pouze zveršoval. Z desátého století se dochovala i sbírka šesti úloh od Abú Kámila nazvaná *Sbírka matematických kuriozit.* Tyto úlohy vedou vždy na soustavu diofantických rovnic a jejich formulace je poněkud stereotypní—osoba má k dispozici sto drachem a jejím úkolem je koupit několik druhů ptáků za různé ceny. Pro bližší seznámení se s těmito sbírkami doporučuji knihu [Ma1]. Jako upoutávku uvádíme výběr několika zadání z výše uvedených knih.

Lineární rovnicí o jedné neznámé by dnešní žactvo řešilo tuto úlohu: *Nějaký chlapec pozdravil otce. Buď pozdraven otče, pravil. Na to otec odpověděl: Buď zdráv synu. Ať žiješ kolik jsi žil a tento dvojnásobek roků ztrojnásobíš a přidej jeden z mých roků a budeš mít sto let. Ať řekne kdo může, kolik let měl tenkrát onen chlapec.* Kromě matematiky bychom měli ocenit jak pěkně se k sobě otec a syn chovali.

Dnešní úlohy na převádění jednotek jsou jednotvárně formulovány rozkazem převeďte decimetry na centimetry a následuje několik číselných zadání. Alcuin však tyto úlohy formuluje s velkým šarmem, námi vybraná připomíná spíše Fontainovy či Krylovovy bajky: *Hlemýžď byl od vlaštovky pozván na svačinu ve vzdálenosti jedné míle. Hlemýžď však nemohl za den ujít více než jednu unci stopy. Ať řekne kdo by chtěl za kolik dní by hlemýžď dorazil na onu svačinu.* Podmiňovací způsob je na místě, neboť podle Alcuinova výsledku by šnek dorazil na svačinu za 90 000 dní.

Úlohy o společné práci bývají zadávány tak jak to trefně popsal S. Leacock v díle Literární poklesky. Superman A to zvládne skoro celé sám, B je běžný pracovník a C takový nešika, že je až s podivem, že ho ti dva vůbec vzali do party. Ne tak Metodoros: *Výrobče pálených cihel, velice moc si přeji dokončit dům. Dnešní den je bez mraků a já už nepotřebuji mnoho pálených cihel; dohromady je jich jenom třista, které chybí. Tak mnoho jsi udělal sám za jediný den a dvě stě přinesla denní práce synova, právě tak mnoho a ještě padesát dodal zeť. Kolik hodin to tedy trvá, když se vy tři společně pustíte do práce?* Kromě poetické hodnoty oceníme i realismus úlohy. Syn i zeť otci významně pomohou a přitom je pochopitelné, že mistr je na práci šikovnější než tovaryši.

Mezipředmětové vztahy napomohou upevnit úlohy v nichž vystupují postavy z řecké mytologie, jednu z nich uvedeme závěrem: *Jednou se zeptala Afrodité Erota, který k ní přišel sklíčený: "Jaký zármutek tě trápí mé dítě?" On tedy odpověděl: "Právě jsem přicházel z Helikonu, obtížen jablky, ale ta mi ukradly Múzy a pak uprchly. Kleio mi vzala pětinu, Euterpe dvanáctinu jablek; dále osminu Thaleia, ta vznešená, dvacetinu pak ještě sebrala Melpomene, Terpsichore mi ukradla čtvrtinu a Erato uchopila jako svůj díl sedminu. Polyhymnia mi ukradla třicet jablek, sto dvacet potom Urania, s těžkým nákladem se odplížila pryč Kalliopé s třemi sty jablky. A tak jsem přišel k tobě domů—pohleď—s lehkýma rukama; bohyně mi nechaly jen pouhých padesát jablek."* Jelikož Múzy inspirovaly a inspirují umělce a vědce, tak jim tento poklesek odpustíme.

3.2 Fibonacci aneb nejen problémy chovatelské

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se přitom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci začínají rodit ve dvou měsících svého věku. Jelikož první pár v prvním měsíci dá potomstvo, zdvojnásob, a v tomto měsíci budeš mít dva páry, z nich jeden pár, totiž první, rodí i v následujícím měsíci, takže ve druhém měsíci budeš mít tři páry. Z nich v následujícím měsíci dva páry dají potomstvo, takže ve třetím měsíci se zrodí ještě dva páry a počet párů králíků v tomto měsíci dosáhne pěti...

Tuto úlohu nalezneme v knize *Liber abaci*, jejímž autorem je *Leonardo Pisánský*, též nazývaný *Fibonacci.* Autor postupně rozebírá situaci v jednotlivých měsících, aby nakonec dospěl k tomu, že za jeden rok bude v ohradě 377 párů králíků. Úloha končí poznámkou, že takto lze počítat králíky až do nekonečna. Odhlédneme-li poněkud od idealizovaných podmínek, jako je věrnost partnerů a železné zdraví na jedné straně a na dnešní poměry neuvěřitelně nízká a kupodivu pravidelná produktivita rozmnožování, je nám zde představena zajímavá posloupnost. Tato posloupnost se dnes nazývá Fibonacciho a lze ji zadat rekurentním vzorcem $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.[1] Prvky této posloupnosti se nazývají *Fibonacciho čísla* a mimo matematiku se s nimi můžeme setkat mj. v knize Dana Browna Šifra mistra Leonarda.

S Fibonacciho čísly se dnes setkávám v řadě oblastí matematiky, zde si uvedeme jednu zajímavou souvislost. Eukleides v tvrzení 11 druhé knihy řeší následující úlohu: *Rozdělit danou úsečku tak, aby obsah obdélníka, jehož strany jsou původní úsečka a jedna z částí měl stejný obsah jako čtverec, jehož stranou je druhá část.*

Označíme-li x stranu čtverce, potom musí platit

$$a(a-x) = x^2,$$

což dává kvadratickou rovnici $x^2 + ax - a^2$ a její řešení je $x_{1,2} = \frac{a(-1\pm\sqrt{5})}{2}$. Podmínkám úlohy vyhovuje pouze kladný z těchto kořenů. Označíme-li

$$\Phi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

obdržíme po dosazení za x $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618034$. Úloha rozdělit úsečku na takové části se dnes nazývá zlatý řez a číslo Φ zlatý poměr. Tento poměr je současně $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Další zajímavosti o Fibonacciho číslech lze nalézt mj. v [Ja], kde je uvedena i další literatura týkající se této problematiky.

Fibonacci byl nejvýznamnějším středoevropským matematikem a posloupnost po něm pojmenovaná není zdaleka jeho jediným vkladem do matematiky. Kromě již zmíněné Knihy o abaku je autorem dalších čtyř matematických spisů, jež uvedeme v českém překladu: Praxe geometrie, Květ, Dopis podepsaného Leonarda Mistru Theodorovi, císařskému filozofovi a Kniha čtverců. Ačkoliv není ve svých dílech vždy originální a přebírá poznatky dalších matematiků, s jejímiž spisy se zřejmě seznámil na svých cestách, jeho dílo stojí za pozornost. Nemůžeme zde podrobně rozebírat jeho spisy, v tomto ohledu odkazujeme čtenáře na knihu [Be2], proto uvedem stručně jen některé jeho výsledky.

Fibonacci jako jeden z prvních začal používat indicko-arabské číslice a desítkový poziční systém. Část jeho díla je věnována zápisu čísel, početním operacím včetně odmocňování a převádění jednotek. V Knize o abaku však najdeme i úlohy vedoucí na řešení rovnic, a to i kvadratických a kubických. Jelikož se v té době nepoužívala současná notace a nepracovalo se se zápornými čísly, musí při řešení kvadratických rovnic používat několik typů tak, aby se v nich nevyskytovaly záporné koeficienty. U kvadratických rovnic dokážeme zrekonstruovat řešení a přijít k závěru, že v podstatě používal současné vzorce, tak u rovnice kubické tomu tak není, ačkoliv jím nalezené řešení je velice přesné.

Leonardo pisánský pracoval i s posloupnostmi, kromě již zmíněné po něm pojmenované u něho nalezneme příklady na součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, příklady na součet čtverců a evergreen zábavné matematiky, totiž staroegyptskou úlohu o kočkách. Jelikž od prvního uvedení této úlohy uplynulo již mnoho let, v jeho podání se z koček staly stařeny. V jeho spisech nalezneme i

[1] Název poprvé užil francouzský matematk E. Lucas (1842–1891).

úlohy na řešení diofantických rovnic. Kromě ptačích úloh jako v Abu Kámilovi zde nalezneme i úlohy složitější, které spíše připomínají Diofantovu Aritmetiku. Jako příklad můžeme uvést tuto: *Nalezněte čtvercové číslo, které zvětšeno i zmenšeno o 5 dává opět čtvercové číslo.*

V geometrii při definování základních pojmů navázal na Eukleida, věnuje se i "měření obrazců", pod tímto pojmem musíme rozumět především návody na výpočet obsahu. Uvádí obecný vzorec na výpočet obvodu a obsahu kruhu, v jeho podání je $\pi = \frac{22}{7}$. Je zajímavé, že reprodukuje i Archimédovu metodu na výpočet čísla π pomocí opsání a vepsání pravidelného šestadevadesátiúhelníku. Fibonnacci uvádí i návody na výpočet objemů těles, zejména jehlanu a koule. Věnuje se i výpočtům délek stran a úhlopříček pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka a zlatému řezu. Uměl dokázat, že těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě a že těžiště dělí těžnici v poměru $2 : 1$.[2]

Závěrem se zmíníme o dvou zajímavých skutečnostech. Ve Fibonacciho pracech se objevují náznaky používání matematické notace a obecné řešení úloh. Jako příklad můžeme uvést tuto úlohu: *Pět koní spotřebuje za devět dní šest váhových jednotek ovsa. Za kolik dnů spotřebuje deset koní šestnáct stejných váhových jednotek ovsa?* Fibonacci říká, že a koní spotřebuje b ovsa v c dnech, d koní pak e jednotek v f dnech. Musí platit $abc = def$ a odsud lze vypočítat požadovanou hodnotu. V některých úlohách na řešení finanční hotovosti několika osob; tyto úlohy vedou na soustavu lineárních rovnic, které mají jedno řešení záporné. Fibonacci uvádí, že tato úloha je řešitelná pouze v případě, že uznáme, že daná osoba má dluh (neboli řešením je číslo záporná).

3.3 Arabové

S Araby jsme se již setkali v části věnované egyptské matematice a zmínka o jejich přínosu vědě byla velmi negativní. Naznačili jsme však, že se jednalo spíše o exces a nyní přichází ta správná chvíle, abychom čtenáře seznámili s arabským vkladem do pokladnice světové matematiky. Když v roce 622 uprchl Mohamed z Mekky do Medíny, asi jen málokdo tušil, že se za osm let vítězně vrátí a že jeho nástupci dobudou rozsáhlá území, na nichž se rozšíří jím založené nové náboženství—islám.

Arabové během několika staletí obsadili území, které na západě začínalo ve Španělsku a přes severní Afriku a Blízký východ dosahovalo až k řece Indu. Tato říše byla značně nesourodá a postupně se rozpadla na několik samostatných celků a nastával též postupný úpadek a ztráta dobytých pozic. Stejně jako tomu bylo v případě říše římské, tak i na území obsazeném Araby žili dál původní obyvatelé, proto se někdy mluví ne o arabské matematice, ale o matematice islámské. Ani tento termín však není úplně přesný, neboť vedle dominantního islámu byla tolerována i jiná vyznání, zejména křesťanství a judaismus. My se budeme pro jednoduchost držet u nás vžitého označení matematika arabská.

Tak jako Ptolemaiovci v Egyptě, tak i bagdádští kalifové si uvědomovali význam vědy a vzdělání a vědecké bádání všemožně podporovali. Za vlády Hárúna ar-Raašída (786–809) byla založena velká knihovna, která byla neustále doplňo-

[2] Tento fakt znal již Archimédes, jeho důkaz se však nezachoval.

vána. Jeho nástupce Al-mamún pak založil obdobu Múseia. Tuto instituci nazval *Dům moudrosti* a soustředil sem přední učence té doby. Podobné ústavy vznikly i v jiných místech. Trochu zjednodušeně můžeme říci, že se arabští matematikové seznámili s výsledky svých kolegů v jiných kulturách (Řecko, Babylón, Indie ap.) a získané poznatky tvůrčím způsobem dále rozvíjeli. Arabským učencům patří velký dík za to, že přeložili Eukleidovy Základy, Diofantovu Aritmetiku, Práce Archimédovy, Apollóniovy a dalších řeckých vědců. Některé jejich objevy by zřejmě byly bez těchto překladů nenávratně ztraceny. Ptolemaiovo astronomické dílo Syntaxis megalé je ve světě mnohem známější pod arabským názvem Almagest. K překladům pak byly připojovány zasvěcené komentáře, takže se tato díla stala mnohem srozumitelnějšími. Arabové se také oprostili od geometrických představ v aritmetice.

Jednou z partií školské matematiky je algebra. Tento název má původ v arabštině a byl převzat z knihy nejznámějšího arabského matematika Al-Chwarízmího, která nese název *Krátká kniha o počtu al-džabr a al-mugábaly*. V tomto spise se kromě praktických problémů (obchodní smlouvy, závěti) zabývá i řešením lineárních a kvadratických rovnic s celočíselnými koeficienty. Chwarízmí nepoužívá symboliku, proto musí veškeré operace popisovat slovně. Neuvažuje záporná čísla, proto musí uvažovat několik typů rovnic s kladnými koeficienty. Stejně tak neuvažuje záporná řešení. Při řešení používá dva typy operací: al- džabr, což je v podstatě přičtení stejného členu k oběma stranám rovnice a al-mugabála, což je sloučení členů stejného řádu. Kvadratické rovnice nebyly ovšem vrcholem arabské algebry. Omar Chajjám napsal spis o klasifikaci a řešení rovnic třetího stupně a Al-Káší uměl řešit i některé rovnice stupně čtvrtého. V arabské matematice se pěstovala také trigonometrie a v této disciplině dosáhli značných úspěchů. Navázali jak na práce matematiků řeckých (Ptolemaios), tak i indických. Nápad měřit velikost úhlu pomocí délky tětivy pocházel z Řecka, Indové to vylepšili tím, že používali poloviční tětivu, tedy funkci sinus. Arabové tyto poznatky převzali a rozvinuli. Zavedli novou funkci stín (kotangens) a obrácený stín (tangens) a používali také dnes již polozapomenuté funkce sekans a kosekans. K usnadnění výpočtů byly sestaveny tabulky trigonometrických funkcí. Je zajímavé, že tyto poznatky používali pouze při řešení astronomických úloh. Rovinné problémy řešili podobně jako Řekové rozdělením obecného trojúhelníka na dva pravoúhlé. Dokázali sinovou větu a formulovali větu kosinovou, aniž by jí přikládali nějaký význam.

Arabové zanechali v matematice ještě jednu velmi výraznou stopu, s níž se setkáváme na každém kroku—tzv. arabské číslice. Již zmíněný Chwarízmí si uvědomil, jaký význam má skutečnost, že pomocí devíti znaků lze vyjádřit jakkoliv velké číslo. Těch znaků je vlastně deset, neboť Chwarízmí používá desítkovou poziční soustavu a je nutné kvůli jednoznačnosti mít nějaký znak pro prázdné místo. V jeho podání to byl kroužek, tedy naše pozdější nula. Desítkový poziční systém není vynález arabský, nýbrž indický. Indové tento systém začali postupně používat zhruba od 7. století. Od nich ho postupně přebíraly i ostatní národy. Podobně jako v Indii, i u Arabů se tento systém prosazoval poměrně pomalu, zato však neustále. Do Evropy se dostal přes Španělsko, které bylo v té době ovládáno Araby (Maury). Nejstarší rukopis, který používá arabské (lépe by bylo říkat indické) číslice, pochází z roku 976 a byl nalezen v severním Španělsku poblíž města Logrono. Desítková poziční soustava postupně vytlačovala zejména nepraktický způsob zápisu číslic po římském způsobu. Co se však týkalo měr a vah, zde se projevila velká setrvačnost a staré míry a váhy, které vesměs nebyly založeny na dekadickém systému, přežily takřka až do dnešních dnů.[3] Na závěr tohoto odstavce přidáme ještě malý jazykový koutek. Latinská podoba jména Al-Chwarízmího byla nejčastěji Algoritmus a toto jméno se stalo názvem pro novou aritmetiku. Arabské označení pro prázdné místo (nulu) bylo *as syfr*. Z tohoto názvu vznikla nejen zero (označení pro nulu v některých jazycích), ale i cifra (dnes ve významu číslice). Nula pochází z latinského nullus (žádný) a do hovorové řeči matematiků tento název pronikl v 15. století.

3.4 Matematika v českých zemích

Jak již bylo řečeno, první památka na početní znalosti lidí byla nalezena v jihomoravských Dolních Věstonicích. Podívejme se, jak si vedli naši předkové v matematice ve středověku. Potíž je v tom, že se nám zejména z raného středověku nezachovaly prakticky žádné traktáty, které by se věnovaly čistě matematice. Musíme se tedy spolehnout pouze na hmotné památky či vzít v úvahu důkazy nepřímé. Prvním státním útvarem na našem území byla Velká Morava. Všichni čtyři velkomoravští panovníci byli křesťané a tato víra postupně zvítězila na celém území. Ve velkomoravských střediscích byly stavěny kostelíky a jak ukazují archeologické nálezy, tyto byly stavěny v určitém modulu, takže je jisté, že staří Moravané měli dobré technické znalosti. Staří Moravané měli i čilé obchodní styky s okolními zeměmi a jelikož v té době byla soustava měr a vah značně nejednotná, museli se tehdejší obchodníci dobře vyznat v jejich přepočtech. Nejvýznamnějším křesťanským svátkem jsou velikonoce, tyto svátky jsou však pohyblivé. Vzhledem k omezeným komunikačním možnostem tyto svátky vyhlašovali kněží v každém kostele, museli tedy přinejmenším ovládat algoritmus pro jejich výpočet.

Koncem 9. století, prakticky současně s pádem Velké Moravy, začala v Čechách růst moc Přemyslovců, kteří postupně ovládli území téměř celých Čech a díky Břetislavovi též území dnešní Moravy. O matematických znalostech v tomto období můžeme mluvit stejnými slovy jako tomu bylo v případě Moravy. S Rozvoj feudalismu si vynutil další rozvíjení především geometrie. Bylo totiž nutné přesně stanovit rozměry polností i lesů, stejně tak bylo nutné přesně rozměřit půdu při zakládání měst a vesnic. Zeměměřictví se tak stalo významným oborem lidské činnosti a bylo v těch dobách na velmi dobré úrovni.[4]

Ze svatováclavských legend víme, že budoucí kníže a světec Václav navštěvoval školu při kostele sv. Petra a Pavla v Budči. Tato škola vychovávala syny předních velmožů, především ke kněžskému povolání. Podobné školy byly zakládány i při jiných kostelích. Největší proslulosti nabyla škola při kapitule sv. Víta, kde bylo zřízeno *studium generale minor*. Znalosti, které získali absolventi těchto škol, od-

[3] I dobrý voják Švejk tvrdil, že na Konopišti mělo viset ne deset ale dvanáct černých praporů, neboť na tucty to vždycky přijde levněji.

[4] Nejvýznamnějším důkazem úrovně českého zeměměřictví je Nové Město Pražské, založené Karlem IV. v roce 1348. Král a jeho zeměměřici při plánování Nového Města předběhli dobu o několik století. Dobytčí trh (Karlovo náměstí) se stalo největším náměstím v Evropě a tento primát si udrželo do dnešních dnů.

povídaly tehdejšímu středoevropskému standardu. Učilo se sčítat a odčítat, půlit a zdvojovat, násobit a někdy též dělit. Méně se vyučovalo počítání se zlomky a algoritmy. Obor přirozených čísel byl ohraničen zhruba milionem. V geometrii byly užívány základní pojmy jako bod, přímkm, plocha ap. Byly známy postupy pro výpočet obvodů a obsahů základních plošných útvarů, jakož i pro výpočet objemů některých těles.

Významným impulsem pro rozvj vzdělanosti (nejen) v Čechách bylo založení univerzity v Praze, k němuž došlo v roce 1348. Karlovi se tak podařilo uskutečnit to, oč marně usiloval jeho dědeček Václav II., tedy založit *universitas magistrorum et studentium.* Pražská, nyní Karlova univerzita byla první svého druhu na sever od Alp a studovali na ní nejen studenti ze zemí koruny české, ale i z jiných zemí střední Evropy. Nás bude zajímat především filozofická fakulta, která měla jiné poslání než mají dnešní fakulty stejného názvu. Filozofická (artistická) fakulta byla jakousi přípravkou ke studiu fakult lékařské, právnické a teologické a mimo jiné se na ní vyučovala i matematika. Tuto fakultu můžeme též nazvat fakultou sedmi svobodných umění: humanitně zaměřeného trivia (gramatika, rétorika a dialektika) a přírodovědné zaměřeného kvadrivia (aritmetika, geometrie, astronomie a hudba).

Od založení univerzity se na výuce matematiky podílela řada učitelů, my vzpomeneme dva patrně nejvýznamnější. prvním z nich je Mistr Křišťan z Prachatic (?1368–1439), současník a přítel Husův a také farář a kazatel u sv. Michala na Starém Městě pražském. Jeho dílo většinou není původní, vycházel ze spisů zahraničních učenců (Sacrobosco, Jan z Erfurtu). Za nejvýznamnější práci v oblasti matematiky je považován spis *Algorismus prosaycus magistri Christanni*, v němž Křišťan popisuje základní aritmetické operace. Spis *Computus chirometralis* je věnován sestavování kalendáře, určení pohyblivých svátků, slunečních cyklů ap. Jeho další spisy jsou věnovány astronomii, ale také lékařství.

Jméno dalšího předního matematika je ještě méně známé, přestože se s jedním jeho dílem mohou obyvatelé Prahy mohou denně setkávat a je též obdivováno i turisty domácími a zahraničními. Touto památkou je pražský orloj, což jsou nejen věžní hodiny, ale i planetárium. Díky Jiráskovi a jeho Starým pověstem českým víme, že toto mimořádné dílo vytvořil geniální Hanuš z Růže a aby se již žádné město nemohlo chlubit takovou nádherou, byl staroměstskými konšely oslepen. Tato pověst je romantická, avšak ke skutečnosti má daleko. Orloj sestrojil přední český hodinář a mechanik *Mikuláš z Kadaně.* Ten však neměl potřebných astronomických znalostí a proto je jasné, že musel toto dílo zhotovit podle návrhu vynikajícího astronoma. No a tímto učencem nebyl nikdo jiný než mistr pražské univerzity *Jan Šindel (1373–?1450).* Astronomické spisy této vynikající osobnosti se bohužel nedochovaly, byly však jistě vynikající, neboť byly oceňovány i světoznámými astronomy rudolfinské doby Keplerem a Brahem. Podobně jako Křišťan se věnoval i medicíně.

Husitské období hodnotí Palacký jako nejvýznamnější v českých dějinách. Pro toto své tvrzení měl zajisté své důvody, kromě úspěchů politických a vojenských byly české země známy i náboženskou tolerancí, ve středověku jev nevídaný, matematice a přírodním vědám však tato doba příliš nepřála. Nelze říci, že by se na univerzitě přestala matematika pěstovat, její úroveň však spíše stagnovala, dá se říci až do doby, kdy se do Prahy přestěhoval podivínský císař Rudolf II. O této době však budeme mluvit až v příští kapitole.

3.5 Další jména

Zatím jsme uvedli pouze jména a díla, která můžeme využít při výuce matematiky ve školách. Středověk však v Evropě nebyl jen obdobím stagnace vědy a kromě již jmenovaných učenců zde působili i jiní, jejichž přínos matematice neby–nevýznamný. Několik dalších jmen uvedeme ve stručném přehledu. Na dvoře ostrogótského krále Theodoricha působil *Anitius Manlius Boethius (asi 480–524)*, též nazývaný poslední Říman. Byl autorem učebnic pro včechny disciplíny kvadrivia a díky němu se nám zachovaly některé znalosti řecké matematiky. Jeho práce totiž nebyly původní, ale jednalo se o překlady starých řeckých autorů (Eukleides, Nikomachos aj.). Jeho překlad Nikomachovy Aritmetiky se používal jako jako učebnice téměř tisíc let.

Jedním z největších učenců na přelomu prvního a druhého tisíciletí byl *Gerbert z Aurillacu*. Datum jeho narození není známo, pocházel z chudé avšak svobodné rodiny. Vychován a vzděláván byl benediktiny z nedalekého kláštera. Jeho zájmy byly velmi široké, na svých cestách se mj. seznámil se spisy arabských učenců. Jeho matematická pojednání nebyly originální, přispěla však k rozšíření matematických znalostí v Evropě. Přispěl k renesanci abaku, tuto pomůcku zdokonalil. Byl patrně prvním Evropanem, který se seznámil s arabskou matematikou a v omezené míře používal arabské číslice[5]. Jeho spis *Geometria* se věnuje řešení některých geometrických úloh, řešení je však uváděno bez důkazů a podrobného vysvětlení. Některé kapitoly jsou v tomto spise věnovány také zeměměřictví. Byl také skvělým astronomem, v Lateránském paláci v římě dal údajně vybudovat hvězdárnu. Byl také předním evropským politikem a rádcem císaře Oty III., který usiloval o sjednocení křesťanského světa pod vládou jednoho císaře a papeže. V kariéře církevní dosáhl až na metu nejvyšší, v roce 999 byl zvolen jako první Francouz papežem a přijal jméno *Silvestr II.*. Po čtyřech letech na stolci sv. Petra za nevyjasněných okolností umírá a je pohřben v bazilice sv. Jana v Lateránu. O jeho životě koluje řada legend, ne vždy příznivých jeho kněžskému stavu. Pokud je autorovi známo, tak matematikové narozdíl od drtivé většiny ostatních profesí nemají svého patrona. Gerbert by byl asi nejžhavějším kandidátem na tuto pozici, nebyl však kanonizován.

Nejvýznamnější osobností evropské matematiky ve 14. století byl *Nicole Oresme (?1323–1382)*. Jeho nejvýznamnějším matematickým dílem je *Algorismus proportionum*. V tomto spise zavedl mocniny s kladným racionálním exponentem a uvedl pravidla pro počítání s takovými výrazy. V traktátu *De latitudinibus formarum*, v němž nanáší závisle proměnnou (latitudo—šířku) vůči nezávisle proměnné (longitudo—délku), kterou lze měnit. jedná se tedy o jistý způsob přechodu od souřadnic na nebeské či zemské sféře, které používali již starověcí učenci, ke geometrickým souřadnicím jak je známe dnes. Je pravděpodobné, že toto pojednání ovivnilo i zakladatele analytické geometrie.

Ve století patnáctém žil *Johannes Műller* zvaný *Regiomontanus*. Tento skvělý

[5] Na jeho abaku lze nalézt symboly podobné arabským cifrám gobar. Ve svých spisech však čísla popisuje slovy či používá číslice římské.

počtář, ale též mechanik a tiskař se podílel na překladech a vydáních klasických matematických rukopisů. jeho hlavním dílem bylo *De triangulis omnimodus libri quinque*, které je systematickým úvodem do trigonometrie. Regiomontanus neměl k dispozici dnešní symboliku, proto všechny věty musí formulovat slovně. Díky tomuto dílu se trigonometrie stala nezávislou na astronomii. Sestavil také tabulky sinů pro intervaly jedné minuty při poloměru 60 000. Nepodařilo se mu oprostit od chápání sinů jako polovinu délky tětiv pro dvojnásobné úhly. Takto chápané hodnoty ovšem závisely na délce poloměru.[6]

V+W v písni ze hry Těžká barbora se o středověku vyjadřovali dost nelichotivě. I v tomto období však byla pěstována věda, i když především v úzkém okruhu především církevních vzdělanců. Matematika většinou nepřekročila úroveň starověkých Řeků, na rozdíl od nich byla chápána především prakticky a její rozvoj byl do značné míry ovlivněn rozvojem výrobních sil. P. T. čtenářům doporučuji publikaci [Be2], v níž může nalézt více podrobností o některých významných matematicích, ukázky z jejich děl včetně komentářů a další zajímavosti týkající se středověké vědy a školství.

[6] Jednotkový poloměr zavedl až Euler v roce 1748.

Kapitola 4

Matematika v 16. a 17. století

Dějepisci se neshodli na tom, kdy končí středověk, mnohdy se udává, že objevem Ameriky či vynálezem knihtisku. Obě tyto události byly významným milníkem v lidských dějinách, zejména ta druhá. Gutenbergův vynález umožnil, aby vzdělání postupně přestalo být záležitostí privilegované hrstky lidí. Objevení nového kontinentu Kolumbem zase podnítilo zámořské cesty, výrazně vzrostl obchod. K cestě přes oceán bylo zapotřebí větších lodí, bylo zapotřebí dokonalejší navigace. Legendární Magalhaesova plavba dokázala, že je Země kulatá, Koperník přišel s geocentrickou teorií, kterou později zdokonalil Kepler a Newton objasnil proč tomu tak musí být z hlediska dynamiky.

Tyto i další skutečnosti byly také impulsem pro rozvoj matematiky. Ta se nejen vyrovnala znalostem starověkým, nýbrž je překonala a její vývoj postupoval nezadržitelně kupředu. Byla objevena komplexní čísla, vybudovány základy infimitezimálního počtu, objev logaritmů značně zjednodušil zejména astronomické výpočty, počet pravděpodobnosti přivedl do matematiky náhodné jevy, algebraická notace značně zjednodušila psaní matematických textů a tak bychom mohli pokračovat dále. My se podrobněji zmíníme o zejména těch oborech, s nimiž se setkáváme ve školské matematice.

4.1 Algebraické rovnice, komplexní čísla

V jedné z prvních tištěných matematických knih *Summa de Arithmetica*, jejímž autorem byl františkán *Luca Paciolli* se můžeme mimo jiné dočíst, že řešení kubických rovnic je za daného stavu nemožné právě tak, jako kvadratura kruhu. Některé speciální typy kubických rovnic dokázali řešit již staří Babylóňané, dílčích úspěchů dosáhli i staří Řekové či Arabové, obecná formule či lépe řečeno postup se však nalézt nepodařilo. Řečeno slovy kuchaře okultisty Jurajdy k nalezení obecného postupu při řešení těchto rovnic byli předurčeni až matematikové v Itálii.

Prvním z nich byl *Scipione del Ferro*, který žil v letech 1465–1526 v Bologni. Tento našel řešení některých typů rovnic[1], své řešení však nepublikoval, sdělil

[1] Jelikož v této době ještě nebyla vzata na milost, matematikové psali rovnice tak, aby koefi-

je údajně jen několika svým přátelům. Benátský počtář *Niccolo Fontana (1499?–1557)*, známý pod přezdívkou *Tartaglia*, česky Koktavec, údajně uměl řešit všechny typy rovnic, ani on však svoje výsledky nepublikoval, sdělil je však pod podmínkou mlčení milánskému lékaři *Geronimovi Cardanovi (1501–1576)*. Tento pán se kromě medicíny zabýval i matematikou a narozdíl od výše jmenovaných kolegů se rozhodl nemlčet a výsledky své i svých kolegů uveřejnil ve vynikající knize *Ars magna*, v níž vyložil metody řešení rovnic třetího a také čtvrtého stupně. Oproti některým vědcům na sever od Alp Cardano poctivě uvedl, které výsledky jsou jeho vlastní a které převzal. V této knize se tedy můžeme dočíst, že metodu pro řešení kubických rovnic mu prozradil Tartaglia, ovšem bez důkazu, což ho motivovalo k tomu, aby důkaz nalezl a publikoval. Tento podle našeho mínění čestný postup však Tartagliu velice rozlítil a mezi oběma pány se rozpoutal spor, přičemž oba učenci si v něm občas nebrali servítky. V každém případě ve všech knihách se vzorce, pomocí nichž můžeme kubické rovnice řešit, nazývají vzorce Cardanovy.

Tyto vzorce se v dnešní době počítačů již prakticky nepoužívají, přesto si dovolíme plýtvat místem a tyto formule uvedeme. Je-li dána rovnice $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, lze substitucí $x = y - \frac{a_1}{3}$ eliminovat kvadratický člen. Můžeme tedy uvažovat rovnice tvaru $x^3 + px + q = 0$, jejíž kořeny jsou dány vzorcem

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Řešíme-li rovnici $x^3 - 6x + 4 = 0$, zjistíme, že nemá řešení v oboru reálných čísel, neboť výraz pod druhou odmocninou je záporný. Přitom bez použití složitých výpočtů se snadno přesvědčíme, že této rovnici vyhovuje číslo 2. Tento paradox si nedovedli tehdejší řešitelé vysvětlit a byl jimi nazván *casus ireducibilis*. Takový případ nastává vždy, když kubická rovnice má tři reálné různé kořeny. Snadno se přesvědčíme, že námi uvedená rovnice má ještě iracionální kořeny $-1 \pm \sqrt{3}$. Cardano uvažoval i záporné kořeny, které nazýval fiktivní. Ve svém díle uvedl i metody řešení rovnic čtvrtého stupně, což byl objev jeho žáka *Lodovica Ferrariho (1522–1565)*.

Casus ireducibilis byl s velkou pravděpodobností impulsem ke vzniku *komplexních čísel*, neboť se dalo tušit, i odmocnina se záporného čísla může mít určitý smysl. To už ovšem naznačil i Cardano, který uveřejnil následující úlohu, kterou uvedeme s pomocí současné symboliky: *Je-li třeba rozdělit 10 na dvě části, jejichž součin je 30 nebo 40, je jasné, že tento případ je nemožný. Budeme však postupovat takto: rozdělíme deset na půl, polovina bude pět; to vynásobeno samo sebou dá 25. Potom odečteme od 25 požadovaný součin, řekněme 40, zůstane (-15); vezmeme-li z toho odmocninu a přidáme k 5 a odečteme od 5, vyjdou veličiny, které vynásobeny mezi sebou dají 40. tyto veličiny budou* $5 + \sqrt{5}$ *a* $5 - \sqrt{5}$. Je otázkou, jak si vysvětlit uvedení této úlohy, badatelé se kloní k názoru, že Cardano chtěl tímto příkladem ilustrovat, že i při řešení kvadratických rovnic lze dospět k odmocninám ze záporných čísel. Je-li tomu tak, jednalo se o myšlenku revoluční, neboť po celá tři tisíciletí, co byly kvadratické rovnice řešeny, takt nikdo neuvažoval. Jak snadno vidíme, uvedenou úlohu bychom dnes snadno vyřešili skrze kvadratickou

---

cienty byla pouze čísla kladná. Stejně tak nepoužívali současné notace.

rovnici $x(10-x) = 40$. Odmocniny ze záporných čísel nazýval *quantitas sophistica*, ve stanovování jejich vlastností však nijak nepokročil. To *Rafael Bombelli (1526–1572)* byl jinší kabrňák, neboť stanovil osm základních pravidel pro počítání s komplexní jednotkou, přesněji řečeno stanovil, jak mezi sebou násobit jedničku a imaginární jednotku a jak se násobí imaginární jednotky mezi sebou. Že už chápal komplexní čísla v dnešním významu svědčí i některé vztahy, které publikoval ve svém díle *L Algebra parte maggiore dell Aritmetica*. Jako příklad uvádíme rovnost $\sqrt[3]{52+47i} = 4+i$.

Komplexní čísla se prosazovala poměrně pomalu, neboť nebyla zřejmá jejich interpretace. Známý matematik a filosof Descartes jako první použil název čísla *imaginární*, z toho potom vzniklo označení i pro komplexní jednotku, které zavedl Euler. Ten začal vyjadřovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru a je též autorem známé identity $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. To nasvědčuje tomu, že chápal komplexní čísla jako body roviny, explicitně to však nikde nepublikoval. Prvním vědcem, který výslovně chápal komplexní čísla jako body roviny byl norský geodet a kartograf *Caspar Wessel (1745–1818)*, hlavní podíl na rozšíření této představy má *Carl Friedrich Gauss (1777–1855)*, který ve své disertační práci použil komplexních čísel pro důkaz základní věty algebry a v práci *Theoria residuorum biquadraticorum* podal geometrickou interpretaci těchto čísel tak jak je chápeme dnes. Lze tedy říci, že pojmenování komplexní roviny po tomto významném vědci je oprávněné. To však již úplně neplatí o rovnosti $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, která je dnes známa jako Moivreova věta. Francouzský hugenot *Abraham de Moivre (1667–1754*, který valnou část svého života prožil v Anglii sice pracoval s komplexními čísly a tuto rovnost používal, nikdy ji však v této podobě nezapsal. Připomeneme ještě jméno *Lazare Carnot (1753–1823)*, který tato podivná čísla pokřtil dnes používaným jménem komplexní.

Z uvedeného přehledu vyplývá, že komplexní čísla byla s úspěchem používána při řešení (nejen) matematických problémů i když jejich teorie nebyla ještě důkladně propracována. Jako příklad lze uvést řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, třebas rovnice popisující chování jednoduchého elektrického obvodu s cívkou a kondenzátorem má tvar $L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0$. Charakteristická rovnice má kořeny komplexní řešení této rovnice je tedy $I = C_1\cos\frac{1}{LC}t + C_2\sin\frac{1}{LC}t$, konkrétní hodnoty konstant můžeme určit jsou-li dány počáteční podmínky. je však zřejmé, že závislost proudu na čase je popsána harmonickou funkcí a v tomto obvodu probíhají harmonické kmity. Tento postup lze samozřejmě aplikovat i na kmity mechanické. Řešení diferenciálních rovnic se na střední škole obvykle neprobírá, pomocí komplexních čísel můžeme poměrně snadno popsat i poměry v obvodech střídavého proudu jako je stanovení impedance a fázového posuvu mezi napětím a proudem.

4.2 Infimitezimální počet

Tímto pojmem se někdy označují dvě operace, a to derivace a v jistém smyslu derivaci inverzní operace integrál. Anglicky psaná literatura obě operace obvykle označuje termínem kalkulus. Zatímco některé části matematiky mají svůj původ až v novověku, tak zejména určitý integrál má starověký původ. Určitý integrál nám totiž umožní stanovit obsah obrazce s křivými stranami,tedy jedná se o úlohu veskrze praktickou. Jak jsme již uvedli, již starověcí učenci dovedli stanovit obsah některých takových obrazců. Nepoužívali sice pojem funkce, ale základní myšlenka určitého integrálu, totiž rozdělit toto těleso na části, jejichž obsah umíme spočítat a pak tyto dílčí obsahy sečíst, se v jejich pracech již objevuje.

Podívejme se, jak si poradil s problémem vypočítat obsah úseku paraboly $y = x^2$ je-li $x \in [0;1]$ Pierre Fermat. Ten si zvolil libovolné číslo $q \in (0;1)$ a na ose x sestrojil posloupnost bodů o souřadnicích 1, q, q^2, q^3, atd. V těchto bodech pak vztyčil kolmice k ose x, které protínají parabolu v bodech se souřadnicemi $[q^i;(q^i)^2]$. Parabole pak začal opisovat obdélníky, jejichž jednu stranu tvořily sousední body na ose x a druhou vlastně funkční hodnoty na ose y. Sečteme-li obsahy všech těchto obdélníků, obdržíme

$$1 \cdot (1-q) + q^2(q-q^2) + q^4(q^2-q^3) + \ldots =$$

$$(1-q) + q^3(1-q) + q^6(1-q) + \ldots = \frac{1-q}{1-q^3} = \frac{1}{1+q+q^2}$$

Čím více se budeme s číslem q blížit jedničce, tím více se bude obsah obdélníků blížit obsahu úseku paraboly a také číslu $\frac{1}{3}$. Z uvedeného postupu je jasné, že Fermat používal limitní přístup, ačkoliv jen intuitivně, tento pojem bude muset čekat na své objevení ještě dvě století.

Jiný způsob zvolil *Bonaventura Cavalieri (1598–1647)*, jeden z nejlepších žáků *Galilea Galileiho*. Cavalieri užil metody *příčných řezů*, tedy rozřezání plochy na segmenty nekonečně malé šířky; konkrétně pro parabolu mají tyto části délku x^2 a nekonečně malou šířku. Cavalieri hledá součet těchto kvadrátů v trojúhelníku ACE, přičemž předpokládal, že všechny příčky rovnoběžné se stranou AC jsou právě ty kvadráty. Potom

$$\sum_{EA} XY^2 = \sum_{ED} XY^2 + \sum_{DA} XY^2,$$

kde D je střed strany AE. Zvolme na úsečce DA libovolný bod X. Kolmice vedená z bodu X na odvěsnu AE protne střední příčku v bodě Z a přeponu v bodě Y. Pak platí

$$\sum_{EA} XY^2 = \sum_{ED} XY^2 + \sum_{DA}(XZ+ZY)^2 = \sum_{ED} XY^2 + \sum_{DA} XZ^2 + \sum_{DA} ZY^2 + 2\sum_{DA} XZ.ZY.$$

První a třetí suma je vlastně stejná, neboť jsou to obsahy shodných trojúhelníků. Tímto jsme ošetřili křivost a tedy zbývající dvě sumy můžeme považovat za normální obrazce, takže nakonec obdržíme, že

$$\sum_{EA} XY^2 = 2\sum_{ED} XY^2 + \frac{1}{4}.$$

Cavalieri tvrdil, že dvě tělesa o stejné výšce mají stejný objem, mají-li řezy ve stejných výškách stejnou plochu. Toto tvrzení dnes nazýváme *Cavalieriho princip.*

Podle tohoto principu lzr tedy sčítat plochy a obdržíme těleso, součet kvadrátů tedy vyplní jehlan. Můžeme si to představit tak, že řezy jsou vlastně destičky s nekonečně malou tloušťkou. Potom platí

$$\sum_{EA} XY^2 = 8 \sum_{ED} XY^2 = 2 \cdot \frac{1}{8} \sum_{EA} XY^2$$

a po úpravě obdržíme

$$\sum_{EA} XY^2 = \frac{1}{3}.$$

Pokud bychom použili dnešní terminologie, tak Cavalieri nepoužíval při stanovení určitého integrálu pojem limity, ale *nekonečně malé veličiny*. Cavalieri tento postup rozšířil až po devítku, znal tedy vzorec $\sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$, přičemž ona suma je vlastně určitý integrál pd nuly do jedné. S nekonečně malými veličinami pracoval už Cavalieriho učitel Galileo Galilei, když stanovil svůj známý zákon volného pádu. Ten věděl, že rychlost je přímo úměrná času, tedy $v = gt$. Ptáme se, jakou dráhu urazí padající těleso za čas t. V jistém časovém okamžiku t_0 má těleso rychlost gt_0 a za nekonečně malý časový úsek dt urazí dráhu gt_0dt, v čase $t - t_0$ pak dráhu $g(t - t_0)dt$. Celková dráha je $gtdt$, ke stejnému výsledku bychom došli, kdyby se těleso pohybovalo v obou bodech stálou rychlostí $\frac{gt}{2}$. Celková dráha je tedy $s = \frac{1}{2}gt^2$. Puritánům se může zdát, že tento příklad sem nepatří, avšak již Archiméda fyzika inspirovala k mnoha matematickým objevům a stejné platí i v 17. století.

Důležitým problémem bylo také nalezení maxima a minima funkce. V této souvislosti zmiňme Fermatův spis *Methodus ad Disquirendam et Maximam et Minimam*. Fermatův postup při hledání tečny ke křivce $y = f(x)$ si ukážeme opět na příkladu paraboly $y = x^2$ v bodě $T = [x_0; x_0^2]$. Tečna protne osu x v bodě P a my musíme najít jeho x–ovou souřadnici. Zvětšíme-li hodnotu o dx, potom se na tečně dostaneme do bodu P_1 a trojúhelníky budou podobné. Je-li navíc dx velmi malé, lze úsečku nahradit úsečkou. Z podobnosti trojúhelníků máme rovnost

$$PQ = \frac{dx.x_0^2}{(x_0 + dx)^2 - x_0^2}.$$

Fermat nyní použil ne úplně korektní trik, když druhou mocninu dx položil rovnu nule, avšak první mocninu téhož považoval za číslo nenulové a celý zlomek jím zkrátil, takže x–ová souřadnice průsečíku tečny s osou x je $\frac{x_0}{2}$ a směrnice tečny je $k = 2x_0$. Pokud použijeme současných pojmů, tak Fermat nahradil přírůstek funkce jejím diferenciálem. Ač tento postup nebyl zcela korektní, přesto byl mnoha vědci používán a vedl ke správným vásledkům. Matematickým puritánům se to zase nelíbilo a vehementně proti tomu protestovali, ale o tom blíže v partii o krizích v dějinách matematiky.

Newton prý prohlásil, že viděl dál proto, že stál na ramenou obrů. V případě infimitezimálního počtu tomu můžeme rozumět tak, že navázal na práce všech, kteří se před ním infinitezimálním počtem zabývali (a ne o všech je v této knize zmínka). Zeptáme-li se dnes kdo to byl Newton, pak nám většina z těch, kteří budou vědět o koho jde, odpoví, že to byl anglický fyzik. Tento vědec skutečně dostavěl budovu klasické mechaniky a jeho Principie[2] mají pro fyziku stejný význam jako Základy pro matematiku. Méně se už ví, že tento učenec má také velké zásluhy o infimitezimální počet a snad nás nepřekvapí, že v tomto hrála důležitou úlohu fyzika.

Newton využil znalostí analytické geometrie a rovinnou křivku (trajektorii) si představoval jako množinu průsečíků přímek rovnoběžných se souřadnými osami, které se pohybují rychlostmi $\dot{x}$ resp. $\dot{y}$, tyto rychlosti nazýval *fluxe*, zatímco souřadnice nazval *fluenty*. Musí platit

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}.$$

Jejich poměr je pak derivace y podle x. Newton pak formuloval dvě základní úlohy:
1. Ze znalosti závislosti dráhy pohybu hmotného bodu na čase určíme závislost rychlosti na čase.
2. Ze znalosti závislosti rychlosti na čase určíme závislost dráhy na čase.

Druhý problém řešil pomocí hledání primitivní funkce, tedy inverzní proces k derivování. Jelikož v Newtonově době ještě nebyl používán pojem funkce, dá se předpokládat, že Newton měl na mysli pouze funkce spojité. Pokud uvážíme úzké vazby na pohyb tělesa, tak ani nic jiného předpokládat nemůžeme. Je-li dána na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ kladná funkce $y = f(x)$ a podaří-li se nám nalézt takovou funkce $y = F(x)$, pro niž v daném intervalu platí $F'(x) = f(x)$, pak rozdíl $F(b) - F(a)$ je roven obsahu obrazce ohraničeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$. Jinými slovy definujeme tzv. Newtonův integrál

$$(N)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Jiný způsob zvolil *Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)*. Humanitně vzdělaný mladý muž přišel v roce 1672 do Paříže coby diplomat ve službách mohučského arcibiskupa[3]. Co by diplomat se jistě setkal s Králem Sluncem Ludvíkem XIV., avšak osudovým se pro něj stalo setkání s Huygensem. Právě pod vlivem holandského učence konvertoval k matematice a mimo jiné se seznámil s Pascalovou myšlenkou tzv. *charakteristického trojúhelníka* a tuto myšlenku, použitou v jisté speciální situaci, rozpracoval v ucelenou teorii.

Nechť je dána funkce $y = f(x)$. V bodě A sestrojme tečnu ke grafu této funkce a veďme kolmici k této tečně v bodě A. Touto kolmicí, osou x a rovnoběžkou s osou y v bodě A je určen charakteristický trojúhelník APR, kde $\mid AP \mid = y$, $\mid PR \mid = m$. Ten je podobný trojúhelmíku ABC, kde $dx = \mid AB \mid$, $dy = \mid BC \mid$ jsou nekonečně malé. Z podobnosti těchto trojúhelníků obdržíme rovnost $mdx = ydy$. Takto můžeme postupovat v každém bodě a výsledky sečíst. Leibniz se tak pokusil porovnat křivky $y = x^3$ a $y = x^2$, přičemž dospěl k výsledku $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Podobným způsobem pak nalezl i integrály dalších křivek.

---

[2] Philosophiae Naturalis Principia Mathematica čili Matematické základy přírodní filosofie, publikováno 1687

[3] Mohučský arcibiskup byl současně jedním z kurfiřtů čili volitelů římských králů

Newton i Leibniz pracovali nezávisle na sobě a jejich výsledky jsou v něčem shodné a v něčem se liší. Oba objevili souvislost mezi derivací a integrálem a odvodili základní poučky, i když jak již bylo řečeno navázali na dílo svých předchůdců, které značně obohatili. Pokud bychom použili určité metafory, tak dokončili hrubou stavbu budovy zvané infimitezimální počet. Newton však řešil spíše konkrétní problémy a inspirací mu byla mnohdy fyzika. Naproti tomu Leibniz pracoval více matematicky, hledá obecné metody a algoritmy a snaží se sjednotit přístup k různým problémům. Newtonova symbolika byla dosti těžkopádná a nepraktická. Používat tečku nad písmenem bylo před vynálezem techu dosti odvážné. Zato Leibniz věnoval symbolice značnou pozornost a jeho označení používáme až do dnešních časů. Společné oběma pánům bylo na dnešní dobu volné zacházení s malými veličinami. Co z toho vzešlo, uvidíme v další části textu.

Oba pánové se dostali i do sporu, co se týče priority jejich objevu. Jak jsme již uvedli, nebyli objeviteli této discipliny, jejich přínos pro její rozvoj byl zásadní. Newton na této problematice začal pracovat dříve než Leibniz, svoje výsledky však publikoval se značným zpožděním. Leibniz byl v tomto směru již vědcem 21. století a včasným publikováním svých výsledků získával jednoho bobříka za druhým. Ve druhé polovině 17. století navíc neexistovaly vědecké časopisy, publikace byly samostatné knihy a jejich šíření mimo zemi vydání bylo spíše výjimkou. Vědecké konference nebyly pořádány, vzájemné poznatky si učenci vyměňovali korespondenční formou, pokud si je vůbec vyměňovali. Proto můžeme tuto věc uzavřít s tím, že oba tito vědci učinili své objevy nezávisle jeden na druhém.

4.3 Počet pravděpodobnosti

Jako datum narození této disciplíny lze uvést rok 1654, kdy začala čilá korespondence mezi Fermatem a B. Pascalem na téma hazard. Tak jako se Pilát dostal do kréda, tak se do matematiky dostal i rytíř Antoine Gombaud de Méré. Tento francouzský šlechtic měl v oblibě právě hazardní hry a ačkoliv mu nelze upřít jisté matematické znalosti, nedovedl si s některými problémy poradit, proto se s nimi obrátil na Pascala a ten svá řešení konzultoval písemně s Fermatem. V popředí jejich zájmu byl především problém rozdělení sázky mezi dva rovnocenné hráče, kteří z nějakých důvodů nemohli svou hru dohrát. Dejme tomu, že tak jako v play off se hrálo na čtyři vítězná utkání (o jakou hru přesně šlo, prameny neuvádějí), přičemž za stavu 2 : 1 na zápasy ve prospěch hráče A museli tuto sérii předčasně ukončit. Hráčská čest ovšem velela, aby sázka byla rozdělena, bylo i jasné, že hráč A musí dostat víc, ale na poměru jak sázku rozdělit, se nemohli shodnout.

Fermat si uvědomil, že nejpozději po čtyřech utkáních musí celá série skončit. Budou-li se hrát ještě čtyři utkání, pak je možných 16 různých způsobů, jak by série probíhala. (Variace čtvrté třídy ze dvou prvků s opakováním, $\acute{V}_2(4) = 2^4 = 16$. Stačí tedy rozepsat všechny možné způsoby jak by série pokračovala, pak zjistit při kterých průbězích by sázku bral hráč A a úloha je vyřešena. pokud si to takto provedeme, zjistíme, že v 11 případech by sérii vítězně zakončil hráč A a ve zbývajících pěti hráč B. Sázku je tedy nutno rozdělit 11 : 5 ve prospěch hráče A. Fermat si správně uvědomil, že je nutné brát všechny možnosti, tedy včetně těch, které by se reálně nehrály, neboť série by byla již rozhodnuta. Je to jistá obdoba penaltového rozstřelu při pohárových fotbalových utkáních. Pravidla předepisují pět kopů na každé straně, musíme tedy uvažovat všechny možnosti (4^5). Malá poznámka na závěr: Ještě o sto let později se d´Alembert domníval, že při hodu dvěma mincemi jsou možné jen tři výsledky (líc-líc, rub-rub a napůl). Přitom by ani pro něho neměl být problém si vzít dvě různé mince a možné výsledky si znázornit.

Podobnými úvahami se zabýval i Pascal, však si také ve své korespondenci pochvalovali, že pravda je stejná jak v Toulose, tak v Paříži. Pascal však šel ve svých úvahách ještě dále a dospěl k obecnému řešení, které můžeme stručně formulovat následujícím způsobem: Nechť hráči A chybí do skončení série m výher, hráči B pak n výher. Za tohoto předpokladu série skončí po nejvýše $m+n-1$ utkání. Hráč A vyhraje sázku v případě, že jeho soupeř vyhraje nejvýš $n-1$ her, B má šanci, pokud A získá nejvýš $m-1$ vítězství. Sázku je tedy nutno rozdělit v poměru

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{j}.$$

Je škoda, že se tato úloha v učebnicích vyskytuje velmi málo, přitom se autorovi za jeho středoškolského působení skvěle osvědčila jako motivační úloha při úvodu do teorie pravděpodobnosti. Více detailů nejen o tomto problému lze nalézt např. v [Ma2].

Korespondence patřila v tomto období k běžným metodám vědecké práce, takže se o problémech, které řešili Fermat s Pascalem dozvěděli další vědci, mezi jinými i *Christian Huygens.*[4] Tato skvělá postava světové vědy zasáhla i do budování teorie pravděpodobnosti, a to vydáním spisu *De ratiociniis in ludo aleae*. Toto dílo není příliš rozsáhlé, přesto stojí za povšimnutí. Obsahuje 14 témat, které jsou nazvány *Propositio*. Uveďme nyní první tři.

P1: Očekávám-li částku a nebo částku b, které mohu získat stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je $\frac{a+b}{2}$.

P2: Očekávám-li částky a, b nebo c, které mohu získat stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je $\frac{a+b+c}{3}$.

P3: Je-li počet případů, v nichž obdržím částku a roven p a počet případů, v nichž obdržím částku b roven q, a jestliže předpokládám, že všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je $\frac{pa+qb}{p+q}$.

V těchto třech definicích je poprvé zavedena střední hodnota diskrétní náhodné veličiny, i když tento termín Huygens explicitně neuvádí.Jelikož se tato kniha týká her, užívá pojem očekávaná výhra. Stejně tak není uveden pojem pravděpodobnost, místo toho je použit pojem že očekávané výsledky lze získat stejně snadno.

Propositiones 4–9 řeší úlohu o rozdělení sázky. Huygens postupuje od případů jednodušších k složitějším a také rozšiřuje počet hráčů. V plném znění uvedeme pouze Propositio 9, neboť zde Hyugens udává obecnou metodu řešení problému, čímž se dostává na kvalitativně vyšší stupeň než Fermat či Pascal, kteří v podstatě řešili jen konkrétní úlohy.

[4]Christian Huygens (1629–1695), holandský vědec, část života prožil v Paříži. Mj. objevil Saturnovy prstence a formuloval vlnovou teorii světla.

P9. Abychom mohli vypočítat podíl každého hráče při libovolně mnoha hráčích, z nichž některému chybí více a jinému méně her, je třeba zjistit, co náleží hráči, jehož podíl má být zjištěn, když on sám nebo nějaký jiný hráč vyhraje následující hru. Sečtou-li se takto získané části dohromady a dělí-li se tento součet počtem hráčů, obdrží se hledaný podíl dotyčného hráče.

K tomuto Propositiu je připojena tabulka uvádějící řešení úlohy pro 17 situací, které mohou nastat při hře tří hráčů. Zbývající Propositia se týkají hry kostkou. Závěr díla tvoří pět neřešených úloh (Problemata). Zájemce o podrobnější seznámení se s touto knihou opět odkazujeme na publikaci [Ma2].

Pokud se zabýváme matematikou 17. a 18. století, můžeme si být jisti, že narazíme na jméno Bernoulli. Nejinak je tomu i vpřípadě pravděpodobnosti. Z této dynastie musíme zmínit především Jakoba I (1604–1705), autora spisu *Ars conjectandi*. Toto dílo zůstalo nedokončeno, vydal je až v roce 1713 Jakobův syn Niclaus I. V prvním díle této knihy lze nalézt plné znění Huygensových De ratiociniis in ludo aleae včetně podrobných komentářů. Druhý díl je v podstatě učebnicí kombinatoriky, třetí pak navazuje na druhý, neboť jsou v něm uvedeny kombinatorické úlohy s herní tematikou. V posledním, bohužel nedokončeném díle, lze nalézt mj. i první formulaci a důkaz zákona velkých čísel, což je patrně nejvýznamnějším přínosem Jakoba Bernoulliho k teorii pravděpodobnosti.

Středoškolští studenti, kteří mají ve školním vzdělávacím programu pravděpodobnost, se se jménem Bernoulli potkají především v případě binomického rozdělení. Proveďme n nezávislých pokusů, přičemž pravděpodobnost, že při jednom pokusu nastane jev A je p a tato hodnota je pro všechny pokusy stejná. Pak pravděpodobnost, že v této sérii nastane jev A právě k- krát je dána vzprcem

$$p_k(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Tomuto uspořádání se někdy říká Bernoulliho schéma či Bernoulliho posloupnost nezávislých pokusů a skýtá učitelům velké možnosti pro zadávání příkladů z pravděpodobnosti. V každém případě by na toto téma měl být zadán tento příklad:

Test se sestává z dvaceti otázek, přičemž na každou z nich jsou uvedeny čtyři odpovědi, z nichž jedna z nich je správná. Student se na test nepřipravil a test vyplňuje náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že test zvládne, je-li k jeho úspěšnému splnění nutno alespoň patnáct správných odpovědí.

Pravděpodobnost, že se setká středoškolský student se jménem Bernoulli ještě v jiné souvislosti při probírání tohoto tématu není příliš veliká a je to rozhodně škoda. Jakobův synovec Daniel publikoval včetně řešení následující úlohu a jelikož se tak stalo v Petrohradě, je v literatuře známa jako *Petrohradský paradox*[5]. Autor této publikace ji nikdy neopomněl uvést, úloha měla úspěch a během jeho středoškolského působení ji žádný ze studentů správně nezodpověděl. Co to tedy je Petrohradský paradox?

Dva hráči, z nichž jeden je bankéř[6] hrají následující hru. Bankéř hodí mincí a v případě, že padne líc, hra končí a bankéř vyplatí soupeři 2 Kč. V opačném případě

[5] tato úloha byla publikována až v 18. století, jelikož však téma pravděpodobnost již nebudeme v dalším textu zmiňovat, zařadili jsme ji na tomto místě.

[6] Zde nemáme na mysli majitele peněžního ústavu, nýbrž osobu přijímající a vyplácející sázky.

hra pokračuje druhým hodem a je-li výsledkem líc, hra končí, jenže bankéř již musí vyplatit 4 Kč. Hra pokračuje tak dlouho, dokud bankéř nehodí líc. Stane-li se tak v n-tém pokusu, musí bankéř vyplatit soupeři 2^n Kč. Otázka zní, kolik musí hráč vložit korun, aby hra byla spravedlivá, tedy aby výhra či prohra jednoho z nich byla pouze dílem náhody.

Jak již bylo řečeno, pokud autor tento problém studentům předložil, žádný ho nevyřešil, ačkoliv řešení není složité a patřičný vzorec byl probrán. Střední (očekávaná) hodnota výhry je totiž

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} p_i E_i = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots$$

Aby tedy hra byla spravedlivá, musel by hráč vložit do banku nekonečně mnoho korun. To bylo pro studenty obrovské překvapení, zejména tehdy, jestli si tuto hru v praxi před výpočtem zkusili. Její označení jako paradox je tedy zcela oprávněné.

Mají-li žáci již probránu nekonečnou geometrickou řadu, lze se k této problematice ještě jednou vrátit. Paradox totiž spočívá v tom, že bankéř musí soupeři vyplatit výhru v jakékoliv výši. Geometrická posloupnost je v tomto směru velice zrádná, o čemž by mohli vyprávět jak jeden indický maharádža, který nemohl vyplatit slíbenou odměnu vynálezci šachů, tak i důvěřivci, kteří naletěli podvodníkům ve hrách typu letadlo. Hru tedy upravíme tak, že bankéř vyplatí výhru pouze do určité výše, my si stanovíme strop výhry 64 Kč. Očekávaná výše výhry hráče tedy bude

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 32 + 64 \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots \right),$$

tedy asi 5,03 Kč. I v tomto případě musíme brát v potaz všechny možnosti, i když by reálně hra skončila nejpozději pátým pokusem.

Z uvedeného textu by se zdálo, že i tak serózní věda jako je matematika nebyla imunní vůči gamblerství a bezuzdně mu propadla. Jenže tomu tak není. Teorie pravděpodobnosti našla záhy své místo v pojistné matematice, neboť na základě statistických údajů (úmrtnostních tabulek), lze stanovit pravděpodobnost, že se daná osoba dožije věku v. Spojení teorie pravděpodobnosti a statistiky je přirozené, na pravděpodobnosti je založena i moderní fyzika, přesněji řečeno kvantová mechanika. Závěrem povídání o pravděpodobnosti přineseme několik zajímavostí z našich luhů a hájů. Jedním z prvních načich matematiků, kteří se zabývali touto disciplínou, byl Václav Šimerka[7], který se snažil pomocí pravděpodobnosti řešit některé filozofické otázky. [Sm2].

4.4 Rudolfinská Praha

I závěrem této kapitoly se zmíníme o tom, jak to bylo s matematikou v zemích koruny české. Tentokrát naše povídání nebude stručné a hlavně nebude se týkat jen

[7]Václav Šimerka (1819–1887), kněz, učitel a matematik.

věcí regionálního významu. V roce 1576 zemřel císař Maxmilián II. a na uprázdněný trůn nastoupil jeho nejstarší syn Rudolf, toho jména druhý. České šlechtě se pak podařil husarský kousek, když se podařilo přesvědčit mladého panovníka k přesídlení do Prahy. Pražské souměstí se stalo centrem středoevropského soustátí a jeho sláva se tak po více než dvou stech letech opět začala dotýkat hvězd. Císař byl sice poněkud podivínský, měl však zálibu v umění a ve vědách a Praha se stávala oblíbenou destinací vědců i "vědců". Nebudeme se věnovat těm druhým, i když podle známého Fričova filmu objevili řadu užitečných věcí jako lepidlo, leštidlo na parkety a slivovice. My si více všimneme opravdových vědců, ať již domácích či cizinců, kteří byli přilákáni Rudolfovou štědrostí, i když mezi slíbeným a skutečně vyplaceným honorářem byl často dost podstatný rozdíl.

V prvé řadě se musíme zmínit o astronomovi, botanikovi a osobním lékaři panovníka *Tadeáši Hájkovi z Hájku (1525–1600)*. Právě na jeho pozvání přišel do Prahy dánský astronom *Tycho de Brahe (1546–1601)*. Ten obdržel od císaře zámek v Benátkách nad Jizerou a sem pak přenesl svou astronomickou observatoř. Brahe byl skvělý pozorovatel, sestrojil a zdokonalil řadu astronomických přístrojů, avšak panovníka o čočku nežádal, dalekohled byl vynalezen až několik let po jeho smrti. Brahe po sobě zanechal spoustu materiálu o pohybech nebeských těles, které už nestačil zpracovat. Tento úkol vzal na svá bedra dvorní matematikus císaře Rudolfa *Jan Kepler (1571–1630)*. Kepler se soustředil především na pohyb planety Mars a čím více do problematiky viděl, tím více si uvědomoval, že bude nutné opustit tisíce let starou představu o tom, že kružnice je nejdokonalejší ze všech křivek a tudíž všechna nebeská tělesa se musí pohybovat po kruhových trajektoriích. Díky této revoluční myšlence se podařilo uvést do souladu Koperníkovu heliocentrickou soustavu se skutečnými pohyby planet. Ptolemaiova geocentrická soustava, byť byla velice složitá díky neustále přidávaným epicyklům, dávala totiž přesnější výsledky. Keplerova *Astronomia nova* měla velký význam pro další rozvoj astronomie, neboť jeho zákony popisovaly pohyb nebeských těles. Keplerovi se sice podařilo popsat pohyb objektů na obloze, nedovedl však vysvětlit, proč tomu tak je.to dokázal až Newton, když objevil zákon všeobecné gravitace.

Připomeňme si krátce jeho zákony. První říká, že planety se pohybují po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce. Druhý zákon říká, že plochy opsané průvodiči planet za stejný čas jsou stejné (plošná rychlost je konstantní). Díky tomuto zákonu máme na severní polokouli o několik dnů delší léto než na jižní. Když je u nás léto, je Země v aféliu (nejdále od Slunce) a pohybuje se tudíž pomaleji. Rusové své telekomunikační družice posílali na dráhy s velkou exentricitou a ty pak po většinu času zůstávaly nad jejich územím. Kepler později přidal i třetí zákon, který říká, že poměr druhých mocnin oběžných dob je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos. Závěrem povídání o Keplerovi—astronomovi musíme uvést na pravou míru informaci z Fričova fimu. Nikoliv Tycho de Brahe, ale Kepler byl oním profesorem, který žádal císaře o čočku a jeho žádost byla vyřízena příznivě. Kepler již používal dalekohled a narozdíl od Galilea měl okulár jeho teleskopu spojnou čočku.

Kepler patřil k průkopníkům používání logaritmů. Tabulky mu sestavil jeho asistent a též hodinář švýcarského původu *Joost Bűrgi (1552–1632)*

Kapitola 5

Od 18. století po dnešek

Během tohoto období se v lidských dějinách událo mnoho převratných věcí a život se změnil k nepoznání. Tak jako se bouřlivě rozvíjela technika, se nutně musela prudce rozvíjet i matematika. My však paradoxně své vyprávění zestručníme, neboť nové matematické objevy jsou sice velkolepé, avšak přesahují rámec toho, co se učí na základních a středních školách. Zájemce o podrobnější informace z této peridy musíme odkázat na další literaturu.

5.1 Osvícené století

Do názvu tohoto oddílu jsme dali směr, který charakterizuje toto století. Jelikož však píšeme o historii královny věd, lépe by se hodil titulek století Eulerovo. *Leonhard Euler(1707–1783).* Jelikož toto jméno je zmíněno v jiných oddílech, nebudeme se jím zde podrobně zajímat. Švýcarské kořeny má i rodina Bernoulli, v níž se matematické geny dědily tak důsledně, že je nutné některé její členy číslovat podobně jako panovníky. Bratři Johann (1667–1748) a Jakub (1654–1705) se věnovali analýze, v níž dosáhli značných úspěchů a jejich objevy jsou trvalou součástí analýzy. O přínosu této rodiny k rozvoji teorie pravděpodobnosti, jak již bylo zmíněno. Bernoulliova rovnice z hydrodynamiky, která se učí ve fyzice, je dílem Johannova syna Daniela (1700–1784).

Ze Švýcarska není daleko do Francie, kde v tomto období působila řada vynikajících matematiků. *Jean Le Rond dAlembert (1717–1783)*, od roku 1754 stálý sekretář Francouzské Akademie a rovněž vůdčí postava mezi encyklopedisty v oblasti matematiky. Stal se spolu s Danielem Bernoullim zakladatelem teorie parciálních diferenciálních rovnic. Patří i mezi úspěšné fyziky (hydrodynamika, aerodynamika, problém tří těles). Známý je i jeho mechanický princip, který redukuje dynamiku na řešení statických problémů. Zavedl pojem limity. Věnoval se i pravděpodobnosti, ovšem s nevelkým úspěchem. Známe jeho "‘paradox"’, když mylně určil pravděpodobnost při hodu mincí. Podle něho je např. pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemipadne alespoň jednou líc jako $\frac{2}{3}$, neboť uvažoval možnosti LL, LR, RR místo správného LL, LR, RL, RR. Správný výsledek je tedy $\frac{3}{4}$.

Joseph Louis Lagrange (1736–1813) se narodil v Turíně a byl italsko-francouzského původu. Působil v Turíně, Berlíně a v Paříži. Zpočátku se věnoval variačnímu počtu a v tomto oboru objevil řadu původních výsledků. Kromě toho uspořádal a přepracoval historický materiál, toto bylo pro něho typické i v dalších oborech o něž se zajímal. Poté aplikoval své objevy do oblasti mechaniky, mj. podal prvá partikulární řešení problému tří těles. Své výsledky shrnul v knize *Mécanique analytique*, v níž sjednotil různé principy statiky a dynamiky. V infinitezimálním počtu zavedl algebraický přístup, kdy vyšel z rozvoje funkcí v Taylorovu řadu. Pro zajímavost uvádíme, že dnes používaná symbolika pro derivace je dílem právě tohoto pána. V období francouzské revoluce byl předsedou komise pro míry a váhy.

Pierre Simon Laplace (1749–1827) publikoval dvě velké práce: *Théorie analytique des probabilités* a *Mécanique céleste*. Ve druhé knize shrnul dosavadní poznatky z mechaniky. O Napoleonově vztahu k vědě jsme již mluvili, takže se nedivíme, že se zajímal i o toto velké dílo a bylo mu divné, že se vůbec nezmiňuje o Bohu. Laplace odvětil: "‘Sire, nepotřeboval jsem tuto hypotézu. "‘ Musíme však podoktnout, že Laplace to měl dobré i u Bourbonů, jeho krátká ministerská epizoda za Napoleona mu hladce prošla, navíc se ve funkci ministra vnitra neosvědčil. Oč byl horší politik, o to byl lepší vědec a jeho dílo inspirovalo mnohé další vědecké kolegy. Díky němu také neupadlo v zapomnění jméno Bayes, takže pro pravděpodobnost a posteriori používáme vzorec pojmenovaný po tomto téměř zapomenutém anglickém duchovním.

Matematika v českých zemích se v první polovině tohoto století věnovala především praktickým aplikacím. Typickým příkladem je dílko *Gruntowní počátek mathematického umění od Wácslawa Jozefa Weselýho, přísežního zemského mlináře a geometra*, kde nalezneme praktické zeměměřictví včetně trigonometrie. Jiné knihy se zabývaly praktickou či kupeckou aritmetikou, výpočtem úroků a podobnou problematikou. Teprve ve druhé polovině tohoto století začíná česká věda a tím i matematika dohánět zpoždění. *Josef Stepling (1716–1778)* vydává v roce 1751 knihu *Exercitationes geometrico-analyticae* o integraci jistých analytických funkcí, která vzbudila značnou pozornost a dočkala se vbrzku dalších dvou vydání. V roce 1765 pak sepsal dílo o diferenciálním počtu, v níž se snaží rozšířit některé Eulerovy myšlenky. Má také zásluhy o vybudování meteorologické observatoře v pražském Klementinu, která se může pyšnit nejdelší řadou meteorologických pozorování v Evropě s počátkem v roce 1775. V roce 1780 vyšly Newtonovy Principie, k nimž napsal úvod *Jan Tesánek (1728–1788)*. V této práci se snaží zpřesnit pojem limitního přechodu a navázat tak na linii dAlembertovu. Byl také jedním z prvních číselných teoretiků v českých zemích, zabýval se mj. řešením tzv. Pellovy rovnice $du^2+1=v^2$. Patrně nejznámnějším jménem tohoto období je *František Josef Gerstner (1756–1832)*, projektant známé koňské železnice České Budějovice–Linec. To dokládá to, že jeho doménou byly spíše aplikace matematiky do praxe. Kolem roku 1770 byla založena Učená společnost, pozdější Královská česká společnost nauk.

5.2 Století páry

Takto bývá století devatenácté často označováno, čímž se zřejmě chtělo naznačit, že došlo k velkému rozmachu průmyslu, zemědělství a dopravy a motorem a symbolem těchto proměn byl parní stroj. Nové situaci se musela přizpůsobit i věda, matematiku nevyjímaje. Doba titánů, kteří ovládali různé a často odlišné vědní obory pomalu končí a nastává čas specializace, a to i v rámci matematiky. Matematika se pak přesunuje především na školy, matematikové se kromě samotného vědeckého bádání věnují stále více výuce. Toto století také přineslo matematice další obory.

Jedním z posledních vědců staré školy byl *Carl Friedrich Johann Gauss (1777–1855).*

Velký rozvoj zaznamenala geometrie. *Gaspard Monge (1746–1818)* přednášel na vojenské akademii v Méziers o stavbě pevností a díky tomu začal rozvíjet deskriptivní geometrii jako zvláštní obor. Při studiu prostorových křivek a ploch začal využívat infinitezimálního počtu, čímž ustavil další obor—geometrii projektivní. Jeho myšlenky pak rozvinul *Victor Poncelet (1788–1867)* v díle *Traité des propriétes projectives des figures*, v němž jsou obsaženy všechny základní pojmy tohoto odvětví.

Vznik těchto nových odvětví však nebylo nic proti tomu, co zapříčinil Eukleides a co vyplulo na povrch právě v tomto století. Eukleides formuloval své geometrické postuláty v první knize a zatímco první čtyři jsou formulovány velmi jednoduše, pátý je proti nim dost kostrbatý a upovídaný, ostatně posuďte sami.

1. Umím od každého bodu ke každému bodu vést přímou čáru
2. A ohraničenou přímku nepřetržitě přímo prodlužovat
3. A s každým středem a poloměrem opsat kružnici
4. A všechny pravé úhly jsou navzájem shodné
5. A když na dvě přímky přímka padla tak, že vnitřní úhly po jedné straně jsou menší než dva pravé, pak prodloužíme-li ty dvě přímky neomezeně, tak se potkávají na té straně, kde jsou úhly menší než dva pravé.

Této nesourodosti a formulační odlišnosti si všimli již starověcí učenci a tu je napadlo, zda by tento postulát nebylo lze dokázat, tedy zda to není matematemická věta.[1] Tímto problémem se zabýval již Ptolemaios, Násiruddín Túsí, Lambert a Legendre. První z nich žil ve starověku, druhý ve středověku, poslední dva jmenovaní v 18. století, vidíme, že tento problém trápil matematiky prakticky kontinuálně po celá dvě tisíciletí. Ani jmenovaní, ani další, kteří se tímto problémem zabývali, však důkaz nenalezli. Úspěšný nebyl ani Gauss, toho však napadlo, že tento postulát je na předchozích nezávislý a že je ho tedy možné vypustit a případně nahradit postulátem jiným. Tato myšlenka však byla příliš odvážná a Gauss si ji nechal pro sebe, naštěstí však nebyl sám, koho podobné úvahy rovněž napadly a tito dva pánové měli tu odvahu hóknót to do placu. První byl Maďar *János Bólyai (1802–1860)*, druhý pak Rus *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793–1856).*

[1] Později se přišlo na to, že i postulát č. 4 lze dokázat, ale tato skutečnost nevyvolala žádný rozruch.

Kapitola 6

Tři krize v dějinách matematiky

6.1 Krize první

Některé příčiny vzniku této krize jsme již naznačili ve vyprávění o pýthagorejcích, objev iracionálních čísel však nebyl jedinou příčinou. Můžeme zmínit i *Zenóna z Eley (490–430 př. Kr.)* a jeho slavné aporie. Těch bylo původně přes čtyřicet, do dneška se jich zachovalo devět a je otázkou, zda jsou původní či byly při přepisování textů zkresleny. Nejznámější je o Achillovi a želvě, kterou snad ani netřeba citovat. Zmiňme ještě aporii o letícím šípu, která popírá pohyb. Díváme-li se podle Zenona na letící šíp, tak ho vidíme jen proto, že v tom okamžiku stojí na jednom místě. Pohyb se tedy skládá z množství nehybných okamžiků a to není možné. V aporii dichotomie zase tvrdí, že se nelze dostat z místa A do místa B, jelikož nejdříve musíme ujít polovinu této vzdálenosti, potom polovinu z této poloviny atd.

Želvu však předhoní i malý chlapec natož Achilles, střelecké mistrovství Viléma Tella, Robina Hooda či rudých mužů dokazuje, že šíp se pohybuje. Stejně tak každý dojede z jednoho místa na druhé, i když někdy bychom byli rádi kdyby tomu tak nebylo. Tyto skutečnosti však Zenóna zmást nedovedly a argumentoval asi v tomto smyslu: Ano, je to pravda, pohyb vidíme, avšak pokud chceme pochopit to co oči vidí, musíme o pohybu uvažovat tak, jak jsem naznačil. Jak jsem ukázal, tak o pohybu uvažovat nelze, neboť pohyb je vlastní jen proměnlivému světu smyslů, ale je cizí skutečnému bytí. Zenón ve svých aporiích ukázal na protiklad spojitého a diskrétního, pohybu a jeho odrazu ve vědomí neboli protiklad smyslového a rozumového poznání. Ostatně s tímto protikladem se v matematice setkáváme častěji, krásným příkladem je třebas neeuklidovská geometrie.

S problémem iracionálních čísel se Řekové vypořádali tak, že matematiku začali geometrizovat. Vždyť odmocninu ze dvou si můžeme představit jako úhlopříčku čtverce o straně velikosti jedna. Názorně to vidíme v knihách 7—9, kdy Eukleides ve svých důkazech chápe čísla jako úsečky.

6.2 Krize druhá

Také příčiny druhé krize jsou již v antickém Řecku, avšak plně propukla až ve století osmnáctém. Řekneme-li to zjednodušeně, tak tuto krizi má na svědomí infimitezimální počet, či přesněji řečeno způsob, jakým se tato významná matematická disciplína konstituovala. Připomeňme si jak Archimédes prováděl kvadraturu paraboly. Zjednodušeně řečeno, tak obrazec vyplňoval trojúhelníky tak dlouho, až se mu vypočítaná hodnota zdála dosti přesná. Archimédes však byl svým způsobem solitér, kdežto v 17. století se danou problematikou zabývalo stále více a více učenců. Z uvedených příkladů je zřejmé, že problematiku uchopili značně volně a detaily se nezabývali. Podíváme-li se například na Newtonův způsob odvození vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$ je z dnešního hlediska těžko pochopitelný. Vždyť když se nám to hodí, je nekonečně malá veličina o rovna nule, takže ji můžeme zanedbat. Na druhé straně však touto veličinou občas potřebujeme dělit, tam se nám však nula nehodí, proto ji beze studu prohlásíme za nenulovou a dle libosti jí dělíme.

Budování infimitezimálního počtu můžeme směle přirovnat k dobám, kdy se osídloval Divoký západ. Vznikal objev za objevem, aniž by se matematikové příliš zabývali způsobem, jak k danému objevu došli, hlavně že dával výsledky, které byly v souladu s realitou a pomáhal k pochopení skutečností zejména ve fyzice. Postup při odvozování nových a nových objevů byl dosti formální, tehdejším vědcům však nelze upřít to, že měli fantazii a především čuch na dosahování správných výsledků. Za toto slovo se autor citlivějším povahám omlouvá, ve spisovném jazyce však přes veškeré úsilí vhodné slovo nenašel. Opravdovým mistrem v tomto směru byl Euler, jehož umění si ukážeme na dvou příkladech—v prvním dospěl k výsledku správnému, ve druhém se však zmýlil, což však v jeho případě byla jen řídká výjimka, která potvrzovala pravidlo, že Eulerovo dílo patří k pilířům (nejen) analýzy.

Při probírání komlexních čísel na středních školách se běžně provádí srovnání výpočtu mocniny komplexního čísla pomocí Moivreovy věty a věty binomické. Obdobně postupoval i Euler, který uvažoval nekonečně velké n, takže $\varepsilon = \frac{x}{n}$ je zase nekonečně malé. Platí

$$(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)^n = \cos n\varepsilon + i\sin n\varepsilon = \sum_{k=0}^{n}(i)^k\binom{n}{k}\sin^k\varepsilon\cos^{n-k}\varepsilon.$$

Porovnáme-li například imaginární části, obdržíme

$$\sin x = \binom{n}{1}\sin\varepsilon\cos^{n-1}\varepsilon - \binom{n}{3}\sin^3\varepsilon\cos^{n-3}\varepsilon + \dots.$$

Jelikož ε je nekonečně malá veličina, proto je $\cos\varepsilon = 1$ a $\sin\varepsilon = \varepsilon$. Protože n je nekonečně velké číslo, platí $n = n-1 = n-2 = \dots$. Danou rovnost lze tedy psát ve tvaru

$$\sin x = \frac{n\varepsilon}{1} - \frac{n^3\varepsilon^3}{!} + \dots = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

což je správný rozvoj funkce sinus do mocninné řady. Analogickým postupem obdržíme i rozvoj funkce kosinus.

Euler se domníval, že každý nekonečný součet vznikne ze "správné funkce"'. Proto se domníval, že

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

neboť stačí dosadit do rozvoje

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

za x číslo minus 1. Ke stejnému výsledku dospěl i pisánský profesor Guido Grandi, a to vhodným párováním $(1-1)+(1-1)+\ldots = 1$ a $1-(1-1)-\ldots = 0$ a statistickou úvahou známou z vtipů a komických scének.[1]

Není se tedy co divit, že uvedené metody se některým matematikům nelíbily a ti je začali kritizovat. Tak *Bernard Nieuwentijdt (1654–1718)* kritizoval Leibnizův postup, zejména tvrdil, že diferenciály vyšších řádů nemají smysl. Do Newtona se pak ještě tvrději pustil biskup *George Berkeley (1685–1753).* Ten vydal v roce 1734 knihu *The Analyst*, v níž v podstatě používá obdobné argumenty, jaké jsme uvedli výše. Popřít správnost dosažených výsledků nebylo dost dobře možné, Berkeley se však domníval, že ke správným výsledkům se docházelo jen proto, že se dvě chyby de facto vykompenzovaly. Infinitezimální veličiny nazýval duchové zemřelých veličin, říká, že kdo uvěří druhé a třetí fluxi či druhé a třetí diferenci, ten nemůže popírat žádný rys božkosti. Berkeleův spis totiž nese podtitul *Rozprava jednomu nevěřícímu matematikovi*, kterým nebyl nikdo jiný než Newtonův žák a přítel *Edmund Halley (1656–1742).* Je to tentýž pán, který využil Keplerovy a Newtonovy zákony k tomu, aby propočítal dráhu jedné výrazné komety, kterou tak zařadil mezi oběžnice Slunce. Jízdní řád, který jí předepsal, tato kometa nesoucí jeho jméno na rozdíl od vlaků a jiných prostředků veřejné dopravy dodržuje a vždy jednou za sedmdesát osm let se rozzáří na naší obloze. Říká se, že bezbožník Halley odloudil panu biskupovi jednu ovečku, což církevního hodnostáře rozčililo a vyprovokovalo k napsání zmíněné knihy.

Tato historka je možná jen dobře vymyšlená, avšak vystihuje podstatu problému. Ačkoliv matematické nástroje byly vytvářeny podivným způsobem, nebylo lze popřít, že skvěle pomáhaly fyzikům a astronomům řešit problémy před ně stavěné. Věci dospěly tak daleko, že když Laplace představoval Napoleonovi svou *Méchanique céleste*, mohl mu na otázku kde máte Boha odpovědět "'Sire, nepotřeboval jsem tuto hypotézu"'. Není proto náhodou, že odpůrci infinitezimálního počtu se rekrutovali především z řad idealistů. Berkeley totiž nebyl jen duchovní pastýř, ale také významný idealistický filosof. Bylo tedy zřejmé, že s tímto problémem bude třeba něco dělat.

Prvním problémem byla samotná funkce. Otcové zakladatelé sice s funkcemi pracovali, avšak v jejich pojetí to byla nějaká závislost vyjádřená vzorcem a funkce byly samozřejmě spojité. První definice funkce v dnešním pojetí pochází od Johanna Bernoulliho z roku 1718: *Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina, která je sestavena libovolným způsobem z proměnné veličiny a konstant.* V obdobném

[1] Když sním jedno kuře a kamarád bude hladem, tak jsme vlastně každý snědli půl kuřete. Grandi ovšem nebyl tak přízemní a udal příklad dvou bratrů, kteří střídavě ob rok vlastní diamant po otci.

duchu, i když přesněji postupoval Euler: *Funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený libovolně z této proměnné veličiny a konstantních veličin.* O sedm let později, v roce 1755 uvádí následující definici: *Když některé veličiny závisí na jiných tak, že při změně těchto se také pozmění, říkáme, že první jsou funkcí druhých.* Fourier v roce 1822 píše: *Všeobecně funkce $f(x)$ představuje posloupnost hodnot, z nichž každá je libovolná. nepředpokládáme, že jsou tyto hodnoty podřízené společnému zákonu, jdou za sebou libovolným způsobem.* Fourier se rovněž oprostil od představy, že funkce musí být spojitá, i když uvažoval pouze o konečném počtu bodů nespojitosti. V roce 1829 Dirichlet udává že: *y je funkcí x, jestliže každé hodnotě x z daného intervalu odpovídá jediná hodnota y.* Dodává, že není podstatné, jestli existuje nějaký vzorec nebo ne"; jeho definice se používá dodnes. Udává příklad funkce, kdy $y = 1$ pro x racionální a $y = 0$ pro x iracionální. Druhým problémem bylo samo reálné číslo. Zatímco množiny přirozených, celých a racionálních čísel lze definovat poměrně snadno, ať již intuitivně či pomocí axiomů, jak to učinil Ital *Giuseppe Peano (1858–1932)*. Ten definoval přirozené číslo pomocí následujících pěti axiomů:
1. $1 \in N$
2. 1 není následník a^+ pro žádný prvek $a \in N$.
3. Je-li $a \in N$, pak i $a^+ \in N$.
4. Je-li $a^+ = b^+$, pak $a = b$.
5. Nechť $S \subset N$, $1 \in S$ a nechť pro každé $a \in S$ platí $a^+ \in S$. Pak $S = N$. Tento axiom je axiom matematické indukce.

Pomocí těchto axiomů pak můžeme definovat součet a součin přirozených čísel, celé číslo pak jako $a - b$ a racionální číslo jako $\frac{a}{b}$, tedy jako uspořádané dvojice čísel přirozených. Přitom platí, že uspořádané dvojice (a, b) a (c, d) určují totéž celé číslo právětehdy když platí $a + d = b + c$ a tytéž dvojice určují totéž racionální číslo platí-li $ad = bc$. Tento postup se čtenářům může zdát poněkud komplikovaný, jednoduchou definici, kterou vyřkl německý matematik *Leopold Kronecker (1823–1891)* však bohužel matematická obec nepřijala.[2]

Konstrukce reálných čísel pomocí čísel racionálních není jednoduchá, přesto se to matematikům kolem roku 1870 podařilo. V této souvislosti uvádíme jména *Charles Méray (1835–1911)*, *Georg Cantor (1845–1918)* a *Richard Dedekind (1831–1916)*.

Štefan Znám použil vtipný příměr, když v knize [Zn] přirovnává dvě století budovaný zámek infinitezimálního počtu k chaloupce Baby Jagy. Neměl tím na mysli velikost či výstavnost, ale skutečnost, že tento zámek podobně jako čarodějnická chaloupka stál na kuří noze. Bylo tedy třeba vybudovat pod tuto nádhernou budovu pevné základy. Na tomto místě uvedeme jména *Bernard Bolzano (1781–1848)*, *Augustin Louis Cauchy (1789–1857)* a *Karl Weierstrass (1815–1897)*. První dvě jména mají vztah k Praze. Bolzano v Praze žil a působil tam jako profesor, Cauchy zase několik let v tomto městě žil po boku sesazeného francouzského krále Karla X., neboť se živil jako vychovatel jeho dětí. Bolzanovy spisy však nebyly ve veřejnosti příliš známé (pokud své myšlenky vůbec publikoval). Cauchyho práce byly naopak velmi rozšířené, zejména jeho nejvýznamnější dílo *Course d´Analyse*

[2] Tento pán, jenž měl i silný vliv na M. Lercha prohlásil, že přirozená čísla jsou od Boha, vše ostatní je dílem lidským.

z roku 1821. Cauchy korektně definoval základní pojmy jako je spojitost (to uměl i Bolzano) a limita, používá rovněž pojem nekonečně malé veličiny, který dostatečně upřesní. Cauchy se (mylně) domníval, že každá spojitá funkce má derivaci až na konečný počet bodů. Bolzano sestrojil jako první spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě, avšak tento objev nepublikoval. Pevné základy pod budovu infinitezimálního počtu dobudoval třetí jmenovaný, který zavedl do dnešních dnů používanou symboliku ϵ-δ. Jeho definice limity sice způsobila potíže generacím studentů, měla však blahodárný vliv na infinitezimální počet. Díky tomuto přístupu bylo možno odstranit z analýzy intuici a začít tvrzení řádně dokazovat. Tento proces bývá také někdy označován jako *aritmetizace analýzy*, kdy dřívější přístup dynamický byl nahrazen přístupem statickým. Z hlediska matematického tento přístup nemá chybu, avšak pro výuku zejména na středních školách je podle autorových zkušeností lepší začít vysvětlovat derivace podle Newtona. Dynamický přístup je v souladu s technickou praxí, při plánování železničního viaduktu se bere do úvahy jen hmotnost projíždějících vlaků. To, že se na takovém mostě může současně s vlakem ocitnout i křeček se v tomto případě do úvahy nebere, ačkoliv i toto roztomilé zvířátko most zatěžuje.

6.3 Krize třetí

I tato krize má původ v antickém Řecku, když se Epamenides, takto občan Kréty, který jsa znechucen nepoctivým jednáním svých spoluobčanů, pronesl památný výrok že všichni Kréťané jsou lháři. Toto se skutečně stalo, jak zaznamenal Eubúlidés z Milétu, a k této věci se později vrátíme. Tento výrok zdánlivě s matematikou nesouvisí, neboť se týká logiky.

Třetí krizi má na svědomí teorie množin a pojem nekonečno. I starořečtí matematikové se s tímto pojmem museli potýkat, chápali ho však vždy ve smyslu nekonečna *potenciálního*, tedy že nějaká množina nemá hranici. Druhý Eukleidův axiom tvrdí, že úsečku (přímku) můžeme libovolně prodlužovat za krajní body, tvrzení knihy IX zase říká, že prvočísel je více než jakékoliv dané množství prvočísel. V postatě až do devatenáctého století nikoho nenapdlo v souvislosti s nekonečnem uvažovat jinak. Prvním člověkem, kterého napadlo, že v souvislosti s množinami lze uvažovat jinak, byl již zmíněný Bolzano v posmrtně (1851) vydaném spisu *Paradoxien des Unendlichen*. Bolzana totiž napadlo vystoupit na obláček a podívat se na množinu z nadhledu. Ve zmíněném díle mj.říká: *K tomu, abychom si mohli myslet (nekonečný) celek, který se skládá z předmětů a, b, c atd., si nemusíme vytvořit o každém z nich představu. Můžeme si přece myslet množinu všech obyvatel Prahy jako celek, aniž bychom měli představu o každém obyvateli těchto měst.* Na množiny jako celek se díval i Cantor, než si však řekneme, k čemu dospěl, dovolíme si pro odlehčení menší vsuvku.

Mějmě dvě konečné množiny a chceme zjistit, která má více prvků. Jedna možnost je, že spočítáme počet prvků jedné i druhé množiny a výsledky porovnáme. Může tento problém vyřešit i osoba, která počítat neumí? Odpověď je ano, pokud ji napadne předměty z obou množin párovat. při tomto postupu je větší ta množina, v níž nějaké prvky zbudou. Pokud v žádné z těchto množin nic nezbude, pak řekneme, že množiny mají stejný počet prvků, i když nevíme kolik. Matematik by řekl, že dvě množiny mají stejný počet prvků, existuje-li mezi nimi bijekce. Uplatníme-li tento postup na množinu přirozených čísel, začnou se dít věci. Málo se ví, že prvním, který na to přišel, byl Hugo Mazaný, který byl zaměstnán jako recepční v brněnském Grand hotelu, který věren svému jménu měl v té době nekonečně mnoho pokojů. Jednoho večera sem dorazil v prudkém dešti unavený starý člověk a žádal o nocleh. Panu Mazanému se tohoto člověka zželelo a přestože byl hotel plně obsazen, podařilo se mu jistým organizačním opatřením jeden pokoj uvolnit. Tušíme už, že hosta z jedničky přesunul do dvojky, hosta z dvojky do trojky atd., čímž se mu uvolnil pokoj č. 1, aniž by některý z již ubytovaných hostů přišel o pokoj. Pro onoho pána to pan Mazaný udělal zcela nezištně, avšak v dalších případech to dělalaž po úplatku a tím si přišel na pěkné peníze, zejména v období veletrhů a velkých cen, neboť zvěst o tom, že tento šikovný recepční dokáže ubytovat n turistů i v případě, že je hotel plně obsazen. Když se jednoho panu Mazanému podařilo za veliký bakšiš ubytovat i vlak s nekonečně mnoha turisty (bylo nutno přesunout hosty na pokoj s dvojnásobným číslem, aby se uvolnilo nekonečně mnoho pokojů s lichými čísly), tak této činnosti zanechal, aby mohl ve vyhlášených světových letoviscích užívat vydělané peníze.

Cantor se zabýval problémem jednoznačnosti Fourierova řadu, přičemž zjistil, že lze zeslabit předpoklad a připustit v jistém smyslu nekonečně mnoho výjimek, aniž by jednoznačnost byla narušena. Cantor proto zavedl (intuitivně) pojem množiny, prostého zobrazení mezi množinami a pojem mohutnosti. Stanovil, že množina přirozených čísel je spočítatelná a její mohutnost označil $\aleph_0$. Dokázal, že množina racionálních čísel je spočitatelná; stejně tak je spočitatelná množina čísel celých a na druhou stranu i množina druhých mocnin přirozených čísel. Jelikož ne každé přirozené číslo je druhou mocninou a naopak každá druhá mocnina přirozeného čísla je číslo přirozené, je mezi nimi vztah inkluze. Na druhou stranu mezi nimi existuje bijekce a mají tedy stejnou mohutnost (stejný počet prvků). Cantor tak popřel Eukleidův společný axiom 8, který tvrdí, že celek je větší než část. Cantor dále dokázal, že množina čísel reálných spočetná není, že tedy existují přinejmenším dvě různá nekonečna. Mohutnost množiny reálných čísel značíme $\aleph$ I pro reálná čísla platí, že celek není větší než část, neboť libovolný interval reálných čísel má opět mohutnost kontinua. Najít bijekci mezi dvěma intervaly není žádný problém.

Současně s rozvojem nové teorie se začaly objevovat potíže, přesněji řečeno problémy, které nebylo možno vyřešit a které začaly být nazývány paradoxy či antinomie teorie množin. Prvním z těchto antinomií, která byla známa již Cantorovi a kterou publikoval Cesare Burali-Forti v roce 1897 lze formulovat takto: Ordinální číslo dobře uspořádané množiny všech ordinálních čísel je větší než všechna ordinální čísla (existuje ordinální číslo větší než ono samo). Další antinomii můžeme formulovat takto: Nechť M je množina všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem. Jenže v tomto případě $M \in M$ a současně $M \notin M$. Na jiný paradox upozornil *Jules Richard (1862–1956)* v roce 1905. Paradox spočívá v této úvaze: Každé přirozené číslo můžeme popsat jednoznačně jednou větou v nějakém jazyce. Zvolíme-li češtinu, pak tato věta představuje jistou posloupnost písmen české abecedy. Písmen české abecedy je méně než padesát a tudíž českých vět, které obsahují méně než sto písmen je méně 50^{100}. Přirozených čísel je však víc než tento počet a mezi nimi je nejmenší, které označíme n_m. n_m je nejmenší přirozené číslo, které nelze popsat větou s méně než sto písmeny. Jenže touto větou jsme takové číslo právě popsali.

Obdobné problémy však má i logika. Epamenides byl zcela jistě přesvědčen, že je jediný pravdomluvný Kréťan. Jenže podle jeho výroku jsou všichni Kréťané lháři, tedy i on je lhář. V tom případě není pravda, že všichni Kréťané jsou lháři. Je-li onen pravdomluvný Epamenides, pak ovšem pronesl pravdivý výrok...Autor rád vzpomíná na doby, kdy co roztomilé pachole trávíval sobotní odpoledne v holičské oficíně, neboť všichni muži museli být v neděli oholení. Dá se tedy říci, že existovaly dvě skupiny mužů. do první patřili ti muži, které holil holič, do druhé pak ti, kteří se holili sami. Kam však zařadit holiče?

Matematikové (ale i filosofové) se snažili nalézt východisko z krize, ve svém postupu však nebyli jednotní a postupně vzniklo několik směrů, jak z toho ven. *Intuicionisté* odmítali aktuální nekonečno a dávali přednost intuici. Mimo jiné odmítali princip tertium not datur (pro každý výrok platí buď V nebo $\neg V$. Zakladatelem intuicismu byl *Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966).* Jak bylo uvedeno výše, některé antinomie teorie množin mají svou obdobu v logice. *Logicismus* považoval logiku za základ matematiky, samozřejmě logiku novou, zbavenou impredikativnosti (Kréťan se nemůže vyjadřovat o Kréťanech). Mezi nejvýznamnější představitele tohoto směru patří *Bertrand Russel (1872–1970)* a *Alfred North Whitead (1861–1947). Formalismus*, jehož hlavním představitelem byl *David Hilbert ()*, který se odmítal dát vyhnat z ráje, do něhož matematiku uvedl Cantor. Hlavní myšlenkou tohoto směru je vybudování přísně formálního systému a la Eukleides, tedy stanovit úplný a bezesporný systém axiómů, z něhož by se pomocí definic dalo dokázat každé tvrzení. Takto se matematika učí i na školách a zdá se, že ani jiný směr nemůže být možný. To by se ovšem v Brně nesměl narodit *Kurt Gődel*, který vyslovil a dokázal následující tvrzení. *Nechť S je úplný a bezesporný systém axiomů. Pak v něm existuje nerozhodnutelné tvrzení.*

Jak se shodují současní matematikové, z třetí krize jsme se dosud nedostali. Každý z uvedených (a i dalších nezmíněných) směrů určitě přispěl k rozvoji matematiky, avšak krizi nevyřešil. Je situace v matematice podobná fyzice konce 19. století, kdy se zdálo, že až se rozřeší několik posledních problémů (fotoelektrický jev, záření absolutně černého tělesa), budou fyzikové bez práce? Přijde matematický Einstein, který rozmetá současnou matematiku jako domeček z karet? Ale tak jako newtonovská fyzika nezahynula a nadále dobře slouží, tak nezahyne ani matematika Pýthágora, Euklida, Archiméda, fermata, newtona, Eulera a dalších velikánů vědy v předchozích odstavcích zmíněných. Ať již matematikové v budoucnu vymyslí cokoliv, autor má za to, že zedníci budou dále vytyčovat pravý úhel aneb vingl pomocí trojúhelníku o stranách 3, 4, 5. Matematika své postavení rozhodně neztratí a každý, kdo se jí zabývá, by měl znát i její historii, k čemuž snad alespoň trochu napomůže toto dílko.

Část II

Životopisy

V této části uvádíme stručné životopisy některých význačných matematiků, s jejichž jmény se lze setkat při výuce tohoto předmětu na základních a středních školách. Tento výběr je nutně subjektivní, avšak rozsah těchto skript neumožňuje uvést úplně všechny osobnosti, jejichž přičiněním se dnes na školách vyučuje matematika. Zejména u starověkých učenců máme k dispozici jen málo životopisných údajů, které by bylo možno ověřit z jiných pramenů, proto uvádíme i skutečnosti, které možná nejsou pravdivé, ale jak praví klasik, jsou dobře vymyšlené. Domníváme se totiž, že i tyto věci patří do výuky, neboť pomohou tento předmět zlidštit.

Kapitola 7

Zahraniční matematici

7.1 Archimédes ze Syrakus

Archimédes bývá považován za nejvýznamějšího vědce starověku a domníváme se, že právem. Tato osobnost helénistické vědy totiž dokázala, to, co se vyžaduje i dnes spojila teorii s praxí. Řečeno dnešní terminologií, Archimédes vynikal jak v základním, tak i v aplikovaném výzkumu a navíc ovládal několik oborů.

Narodil se 280 př.Kr. v Syrakusách na Sicílii. Toto město na rozdíl od současnosti patřilo k nejvýznamnějším centrům řecké civilizace, a to jak v klasickém, tak i v helénistickém období. V Archimédově době bylo centrum vzdělanosti v Alexandrii, Archimédes také udržoval vědecké styky se svými kolegy z Múseia.

Jak už bylo řečeno, dokázal spojit teorii s praxí. Jeho nejznámější objev se týká působení vztlakových sil na těleso ponořené do kapaliny, tento zákon nese jeho jméno a lze ho formulovat takto: *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny, jejíž objem je stejný jako objem ponořené části tělesa.* Tento objev je dáván do souvislosti s úkolem, který dostal od tyrana Hieróna II. Tento vládce si dal udělat novou korunu ze zlata a měl podezření, že byl zlatníkem ošizen. Proto se obrátil na Archiméda, aby tento problém vyřešil. Archimédes dlouho nemohl přijít záhadě na kloub, až při koupeli si uvědomil, že by problém mohl vyřešit zvážením koruny ve vodě a na vzduchu a výsledky porovnat s kouskem zlata stejné hmotnosti. Podle legendy byl tímto objevem tak nadšen, že vyběhl z lázní a volajíc heuréka (našel jsem), běžel oznámit řešení svému vládci.

Když Hannibal vpadl do Itálie, Syrakusy se přidaly na jeho stranu. V roce 215 př. Kr. byly obleženy římským vojevůdcem Marcellem. Přestože Římané měli velkou převahu, Syrakusy dokázaly této přesile odolávat po tři roky a kromě statečnosti obránců to byla i zásluha Archimédova. Ten plně zapojil své znalosti do služeb syrakuského vojska. Zkonstruoval jeřáby, které dokázaly zachytit a převrátit římské lodi a prý dokonce dokázal tyto lodi zapálit. Zde se autoři rozcházejí v tom, zda se jedná o skutečnost či báji. Přidržíme-li se první verze, pak zřejmě Archimédes využil toho, že štíty bojovníků jsou vlastně zrcadla. Pak už zbývalo jediné—nastavit je tak, aby se jejich ohniska setkala na římské lodi, kam by také byla soustředěna sluneční energie.

Roku 212 př. Kr. Syrakusy padly a současně se vstupem vítězné římské armády se naplnil i osud Archimédův. Ačkoliv Marcellus vydal rozkaz, aby byl život tohoto génia ušetřen, zřejmě v naději, že bude sloužit Římu, nestalo se tak a archimédův život se uzavřel současně se ztrátou svobody rodného města. Legenda praví, že právě v okamžiku, kdy dobyvatelé vstoupili do Archimédova domu, tento právě řešil nějaký problém týkající se kružnic, přičemž si tyto křivky kreslil do písku. Jeho žádost, aby nerušili jeho kruhy římští vojáci pochopili jako pokus o odpor a jeden z nich proklál Archiméda oštěpem. Jméno tohoto vojáka prameny neuvádějí, jméno jeho velitele znají jen znalci římských dějin. Jméno Archimédovo však v zapomnění neupadlo. Kromě již zmíněného zákona máme i Archimédův šroub a Archimédovu spirálu.

7.2 Lazare Carnot

Se jménem Carnot se sice nesetkáme v učebnicích matematiky pro základní či střední školy, přesto jsme se je rozhodli zařadit do tohoto výběru, důvody uvedeme později. Lazare Nicolas Marguerite Carnot se narodil 3. května 1753 ve středostavovské rodině ve městě Nolay v Burgundsku. Od mládí projevoval velké nadání pro matematiku a techniku, není tedy divu, že vystudoval prestižní školu v Mezieres, kde mimo jiné učil i zakladatel deskriptivní geometrie *Gaspard Monge*. Po absolutoriu v roce 1773 se stal důstojníkem francouzské armády, sloužil v různých posádkách a v královské armádě to dotáhl na kapitána.

Když 14. července 1789 padla Bastila, dal všechny své schopnosti do služeb revoluce. Politicky měl blízko k jakobínům, ostatně s Maxmillienem Robespierrem se znal delší dobu a tento charismatický člověk měl na Carnotovy názory velký vliv. Velké Carnotovy chvíle přišly v roce 1793, kdy se stal členem výboru veřejného blaha a měl na starosti armádu. Během krátké doby provedl reformu armády a francouzská revoluční vojska porazila intervenční armády Rakouska a Pruska. Mimo jiné zavedl všeobecnou brannou povinnost pro muže od osmnácti do pětadvaceti let, vyřadil z důstojnického sboru šlechtice ale také negramotné a také spojil dobrovolnické oddíly s regulérní armádou. Nelze pominout ani založení topografické kanceláře, z níž později vznikl generální štáb. Čestný titul *Organizátor vítězství*, který mu byl udělen, byl více než zasloužený.

Carnot neměnil své přesvědčení, zejména vystupoval proti absolutistickým tendecím a nedemokratickým metodám, takže musel několikrát odejít do emigrace. Ač byl názorově blízký Robespierrovi, jeho metody vlády mu byly cizí a proto přispěl k jeho pádu. Z obdobných důvodů byly značně vyhrocené jeho vztahy s Napoleonem, přesto se tyto osobnosti navzájem uznávaly. Napoleon ocenil jeho schopnosti povýšením na divizního generála a udělil mu hraběcí titul. Carnot zase neváhal podpořit Napoleona po jeho návratu z Elby a přijal funkci ministra vnitra. Bourboni mu jeho revoluční činnost neodpustili, takže po jejich restauraci byl nucen definitivně opustit Francii. Svůj život dožil v Magdeburku, kde působil jako vědec a také jako poradce pruské vlády pro otázky vojenského školství a pevnostního stavitelství. Zemřel 2. srpna 1823 a byl pochován v Berlíně. V roce 1889 francouzská vládla rozhodla, že jeho ostatky budou převezeny do Francie a uloženy v Pantheonu.

Carnot patří mezi nejvýznamnější matematiky své doby. Zabýval se především geometrií, Carnotova věta. Jako odborník na pevnostní stavitelství byl ve své době zřejmě jedničkou.

Jméno Carnot by měl znát každý středoškolák, který studoval fyziku, či přesněji řečeno termodynamiku. Zásluhu na tom má Lazare jen nepřímou, Carnotův cyklus a další objevy jsou dílem jeho syna *Nicolase Léonarda Sadi Carnota (1796–1832)*, který podědil otcovy vědecké geny. V roce 1887 byl zvolen francouzským presidentem *Marie Francois Sadi Carnot (1838–1894)*, což je praprasynovec Organizátora vítězství.

7.3 René Descartes

René Descartes se narodil 31. března 1596 v la Haye ve Francii. Vzdělání získal v jezuitské koleji La Fleche v Anjou, kam byl poslán již v osmi letech. Jako mladý hodně cestoval a také vojančil. Byl v řadách armády Maxmiliána Bavorského, která bojovala proti českým stavům, pro jeho účasr v bitvě na Bílé hoře nejsou důkazy. V roce 1828 se usadil v Holandsku, kde žil více než dvacet let. V roce 1649 neodolal pozvání mimořádné ženy na švédském trůně královny Kristiny a odejel za ní do Stockholmu. Drsné severské podnebí mu však nesvědčilo a 11. února 1650 zemřel na zápal plic.

Descartes patřil k nejvýznamějším učencům své doby. Na rozdíl od svého vědeckého kolegy a rivala Fermata se nebál publikovat. V roce 1637 vyšlo jeho dílo *Discours de la méthod pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les science.* Tato kniha obsahovala tři dodatky, z nichž nejvýznamnější je ten poslední s názvem *La Géometrie.* Právě v tomto dodatku formuloval základy analytické geometrie, tedy části matematiky, která řeší geometrické problémy algebraickou cestou. Podařilo se mu také zjednodušit matematickou symboliku, označování neznámých písmeny z konce abecedy a konstat ze začátku pochází právě od něho. Máme i kartézské souřadnice, avšak zde prvenství patří Fermatovi. Descartes řešil i problémy fyzikální, především v mechanice a optice, mj. podal úplnou teorii duhy.

Descarta znají ovšem velmi dobře i zájemci o humanitní obory, neboť patřil k významným filosofům a zabýval se i psychologií. Snad právě úspěchy v matematice vedly Descarta k tomu, že i do filosofie vnáší obdobné metody, tento směr se nazývá racionalismus. Základem je jeho známý výrok *myslím, tedy jsem*Rozlišuje boha jako nestvořenou a nekonečnou substanci a dvě substance stvořené—svět těles a svět duchovní substance s atributem myšlení. Pokusil se i zformulovat obecnou metodu poznání, která je založena na čtyřech pravidlech: 1) Přijímat jen to, co je jasné a zřetelné a mimo jakoukoliv pochybnost. 2) každý problém rozdělit na jednodušší části, které můžeme bezpečně poznat. 3) Postupovat od jednoduchého k složitějšímu. 4) Sestavit úplné seznamy a obecné přehledy, aby bylo jisté, že jsme na nic nezapomněli.

7.4 Leonhard Euler

Leonhard Euler se narodil 15. dubna 1707 v Basileji. Jeho otec byl evangelickým pastorem a chtěl, aby syn kráčel v jeho stopách. Naštěstí se tomu tak nestalo a svět nepřišel o jednoho z největších matematiků všech dob. Velkou zásluhu na tom má Johann Bernoulli, který byl jeho učitelem na basilejské univerzitě. Ač národností Švýcar, řečeno sportovní terminologií, hrál za Rusko a Prusko. Panovníci těchto zemí si totiž uvědomovali význam vědy a proto na prestižní pracoviště dokázali přilákat nejlepší světové vědce.

Euler měl kromě matematického nadání i fenomenální paměť a představivost, takže mohl pracovat až do konce svého života, ačkoliv přišel o zrak. Jeho produktivita byla obdivuhodná, díky jeho rukopisům měli petrohradští tiskaři práci desítky let po jeho smrti. Přitom měl daleko k obrazu matematika coby roztržitého člověka žijícího pouze svou abstraktní vědou a do reálného světa se absolutně nehodícího. Říká se, že to byl žoviální pán, žil normální život.

Zasáhl do všech oblastí matematiky, je velmi těžké na tak malém místě psát o jeho díle. Jeho dílo přispělo k rozvoji teorie čísel. Ve své práci šel v podstatě ve Fermatových stopách, podařilo se mu dokázat či vyvrátit většinu jeho tvrzení, mj. dokázal Velkou Fermatovu větu pro $n = 3$. Řadu jeho poznatků rozšířil a zobecnil, např. Malou Fermatovu větu rozšířil pro případ složeného modulu. Jeho řešení problému sedmi mostů v Královci se stalo základním kamenem nové disciplíny—teorie grafů[Sa].

Těžištěm jeho práce byla však matematická analýza. Jeho definice funkce z roku 1755 rozšiřuje pojetí funkce z pouhého analytického výrazu na vzájemnou závislost dvou veličin. *Když některé veličiny závisí na jiných tak, že při změně těchto (druhých) se také pozmění, říkáme, že první jsou funkcí druhých. Tento název má mimořádně široký charakter a zahrnuje všechny možné způsoby, jak lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných veličin.*

7.5 Pierre de Fermat

Toulosský soudce Pierre de Fermat patří k nejpozoruhodnějším postavám světové matematiky. Bývá označován jako kníže amatérů, avšak v době v níž žil nebyla známa profese matematika v dnešním slova smyslu, proto je toto označení poněkud zavádějící. Narodil se v roce 1601 , alespoň podle dosud publikovaných materiálů. Fermatův otec byl bohatý obchodník s kůžemi a dal svému synovi dobré právnické vzdělání. Za svoji životní ružku si Pierre vyvolil vzdálenou příbuznou Luisu de Long, s níž měl dva syny a tři dcery. Více než dvě století před tím, než poprvé zazněla slavná árie Kecala i Fermat patrně počítal co mu to vynese. Díky své dobré finanční situaci si mohl zakoupit soudcovský úřad v Toulose, kde prožil celý svůj život. Svůj čas dělil mezi úřad, rodinu a své velké hobby-matematiku.

Není přesně známo, odkdy se začal věnovat matematice, je však jisté, že se zhruba v polovině třicátých let připojil ke kroužku kolem pátera Mersenna. Ve Fermatově době nebyly žádné vědecké časopisy a nebyly též organizovány vědecké konference. Vědci tudíž museli své objevy publikovat v knižní formě, což však Fermat z různých důvodů odmítal. Další možnost byla korespondence se svými kolegy a tento způsob páter Mersenne zdokonalil tím, že se stal jakýmsi tajemníkem skupiny badatelů a organizátorem permanentní korespondenční vědecké konference. Fermatovi tento způsob velice vyhovoval, neboť mu umožňoval zůstat v ústraní.

Říká se, že každý muž má mj. vychovat syna a pro Fermata bylo splnění této povinnosti klíčové. Tento pán si především hleděl svého povolání a věda mu byla jen koníčkem. Ačkoliv si dopisoval s vědeckou elitou tehdejší Evropy, s uchováváním své korespondence si nedělal těžkou hlavu. Starší syn Samuel se po otcově smrti stal jeho nástupcem v soudcovském úřadě, zajímal se i o matematiku, z tatínkova talentu toho však zdědil pramálo. Přesto Fermat jr. má pevné místo v dějinách matematiky, jelikož se mu podařilo shromáždit zachované dopisy jak z otcovy pozůstalosti, tak i od jeho kolegů a tyto dopisy vydal. Kdyby nebylo Samuela Fermata, dějiny matematiky by jméno Fermat buď vůbec neznaly nebo by toto jméno bylo uvedeno pouze v těch nejpodrobnějších spisech. Matematika by navíc přišla o největší záhadu své historie, kterou česky psaná literatura nazývá *Velká Fermatova věta.*

Do Fermatových rukou se dostalo Bachetovo vydání Diofantovy Aritmetiky a tato kniha ho tak zaujala, že ji nejen podrobně prostudoval, ale přímo do ní psal své poznámky a komentáře. Samuel tuto knihu v pozůstalosti objevil a spolu s otcovými komentáři ji vydal. Jeden problém řešený Diofantem se týkal pythagorejských trojic a Fermat připsal následující poznámu: *Nelze rozdělit krychli ve dvě krychle, bikvadrát ve dva bikvadráty a obecně žádnou mocninu ve dvě mocniny. Pro tuto skutečnost jsem nalezl nádherný důkaz, tento okraj je však příliš úzký.* Řečeno dnešním matematickým jazykem diofantická rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá pro $n > 2$ řešení v celých číslech. Jednoduchá formulace a zejména sebevědomé Fermatovo prohlášení, že zná důkaz bylo obrovskou výzvou a od zveřejnění do dnešního dne profesionálové i amatéři hledali ztracený důkaz. Wiles sice platnost této hypotézy v roce 1994 dokázal, použil však k tomu takové prostředky Fermatovi prokazatelně neznámé. I po tomto datu trvají pokusy najít nádherný Fermatův důkaz, čím je perpetuum mobile pro fyziky, tím je velká Fermatova věta pro matematiky. Dnes se většina badatelů kloní k tomu, že Fermat nesprávně zobecnil důkaz pro některé konkrétní hodnoty a že se toto tvrzení elementárními prostředky dokázat nedá.

Fermat je považován za zakladatele moderní teorie čísel. Kromě již uvedené Velké Fermatovy věty je známa i tzv. Malá Fermatova věta $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$, je-li p prvočíslo a $(a, p) = 1$. Zabýval se i čísly tvaru $F_n = 2^{2^n} + 1$ (Fermatova čísla), o nichž se mylně domníval, že jsou to prvočísla, důkaz však zřejmě nenašel. Tento problém není dodnes vyřešen, zatím však kromě prvních pěti, která znal již Fermat, žádné nové prvočíslo nalezeno nebylo, naopak mnohá z nich byla faktorizována.[Le]

Fermat patřil k největším postavám světové vědy první poloviny 17. století. Položil základy analytické geometrie a jen díky tomu, že Descartes své myšlenky publikoval knižně kdežto Fermatovy objevy byly známy jen úzkému okruhu lidí máme dnes kartézské souřadnice a ne fermatské. Jeho korespondence s B. Pascalem položila základní kámen k budově teorie pravděpodobnosti. Znal kvadraturu paraboly, uměl napsat rovnici tečny ke křivce, je zakladatelem moderní teorie čísel. Řešil i problémy z mechaniky a optiky, i ve středoškolských učebnicích fyziky lze najít *Fermatův princip*, jímž popisuje šíření světla.

Fermat byl zdrojem inspirace generacím matematiků. Zdálo by se, že po rozřešní jeho slavné hypotézy nás tento Francouz nemůže již ničím překvapit. Koncem 20. století však německý historik matematiky objevil, že věk udaný na Fermatově náhrobku neodpovídá datům narození udávaných v literatuře, přičemž toto datum je doloženo matrikami. Jelikož se nedá předpokládat, že by Samuel Fermat nevěděl věk svého otce, nabízí se toto vysvětlení. Pierre narozený roku 1601 zemřel v útlém věku, přičemž v témže čase ovdověl i jeho otec. Tento se podruhé oženil a se svou druhou ženou zplodili syna, jemuž bylo opět dáno jméno Pierre. Matriky z této doby jsou ztraceny, takže tuto hypotézu již nebude možné doložit.

7.6 Johann Carl Friedrich Gauss

Gauss se narodil 30. dubna 1777 v Braunschweigu jako jediný syn zedníka a vodního mistra. Byl velmi nadaný, pokud by chodil do školy v dnešních časech, byl by zřejmě označen psychology jako hyperaktivní. Vypráví se, že učitel mu zadal sečíst čísla od 1 do 1000, aby ho alespoň na chvíli zabavil. Jaké bylo učitelovo překvapení, když vzápětí Johánek hlásil správný výsledek 500 500. Uvědomil si totiž, že součet prvního a posledního čísla je stejný jako součet druhého a předposledního atd. Stačí tedy sečíst první a poslední a tento součet vynásobit počtem takových dvojic, či chcete-li, použít vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $s_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$. Tato historka je velmi známá, méně se traduje, že malý Gauss již jako tříleté dítě upozornil otce na chybný výpočet mzdy pro jeho dělníky.

Se jménem Gauss se setkáme také v mechanice, elektrostatice, nauce o magnetismu a astronomii, my se však soustředíme na to, čím přispěl k rozvoji matematiky. Pokud jsou do výuky zařazena komplexní čísla, tak si každý vybaví Gaussovu komplexní rovinu, neboli vzájemně jednoznačné přiřazení komplexních čísel a bodů v rovině. Máme-li experimentální data a chceme-li je znázornit graficky, tak použijeme metodu nejmenších čtverců. Tato metoda nám umožní sestrojit z naměřených hodnot takovou křivku, aby součet druhých mocnin všech odchylek byl minimální. Zabýval se také konstrukcí pravidelných n-úhelníků a dokázal, že eukleidovská konstrukce je možná pouze v případě, že $n = 2^k F_1 F_2 \cdots F_n$, kde F_i jsou Fermatova prvočísla (viz Fermat). Proto lze zkonstruovat pravidelný sedmnáctiúhelník, jehož konstrukci našel, naproti tomu pravidelný sedmiúhelník sestrojit nelze, byť je sedmička považována jinak za šťastné číslo.

Jeho dílo *Disquisitiones arithmetique* patří k stěžejním dílům teorie čísel. Mj. zavedl pojem kongruence a dokázal kvadratický zákon reciprocity. Zabýval se také pátým eukleidovým postulátem a přišel k názoru, že kromě eukleidovské geometrie mohou existovat i další, své poznatky v tomto směru však nepublikoval. Jeho plodný život se uzavřel 23. února 1855 v Gottingen, kde po mnoho let působil na zdejší univerzitě.

Kapitola 8

Čeští matematici

8.1 Matyáš Lerch

Matyáš Lerch se narodil 20. února 1860 v Milínově u Sušice v rodině drobného zemědělce. Jeho život ovlivnila nehoda (pád z půdy), při níž si vážně poranil nohu, která zůstala ohnuta v koleně, takže se malý Matyášek mohl pohybovat jen s pomocí berlí. Do školy začal chodit až v devíti letech, kdy se jeho rodina přestěhovala do Sušice. Již na základní škole projevoval malý Matyáš velké nadání, takže není divu, že se rozhodl pro studium nejprve na škole střední a poté i na české technice v Praze. Následky úrazu ho však neustále pronásledovaly. Vzhledem k tělesné vadě se nemohl stát gymnaziálním profesorem jak původně zamýšlel. Rozhodl se proto pro kariéru matematika a vysokoškolského učitele, což bylo pro českou matematiku velkým štěstím. Jako středoškolský učitel by patrně byl jen velmi průměrný, v matematice však dosáhl velkých úspěchů. Po ročním studiu na Karlově Univerzitě a roční stáži v Berlíně byl jmenován asistentem na pražské české technice. V té době začala jeho publikační činnost a to jak v časopisech domácích, tak i v prestižních časopisech zahraničních.

V roce 1895 nastala v jeho životě další významná změna. Jelikož asistentský post již nemohl déle zastávat, pokoušel se získat profesuru na některé vysoké škole v českých zemích. Jeho snaha však nebyla úspěšná, což bylo s podivem, neboť Lerch v té době již byl českou matematickou jedničkou. Je možné, že zde hrála roli i závist a také skutečnost, že Lerch dával své kvality patřičně najevo. Naštěstí se objevila nabídka ze švýcarského Freiburgu, kterou Lerch přijal a byl tak jmenován profesorem na tamnější universitě. Deset let strávených ve Švýcarsku bylo pro Lercha patrně nejšťastnějším obdobím v jeho životě, a to jak v soukromé, tak i v pracovní oblasti. V roce 1900 absolvoval náročnou operaci, která však byla úspěšná a Lerch mohl vyměnit berle za vycházkovou hůl. V témže roce za ním přijela jeho neteř Růžena Sejpková (v roce 1921 ji Lerch pojal za manželku), která mu vedla domácnost. V tomto období vyvrcholila i jeho publikační činnost a jeho matematické dílo bylo oceněno Velkou cenou pařížské Akademie v roce 1900. Tuto prestižní cenu získal Lerch jako první český matematik (a druhý český učenec po Purkyněm).

Přes všechny úspěchy se Lerch toužil vrátit zpět do vlasti. Místem jeho pobytu se stalo Brno, neboť se v rooce 1906 stal profesorem na české technice v tomto městě. Když byla v roce 1919 založena v tomto městě nová universita, bylo celkem přirozené, že se stal jejím prvním profesorem matematiky a konečně se mu tedy dostalo místa, které odpovídalo jeho kvalitám. Bohužel se však z tohoto úspěchu dlouho netěšil, při koupání v řece se nachladil, dostal zápal plic a 3. srpna 1922 v Sušici zemřel.

Lerch byl bezesporu vynikajícím matematikem, jako osobnost však byl poněkud kontroverzní. Možná na to měl vliv jeho úraz z dětství a v pozdějších letech i nepříliš dobrý zdravotní stav neboť onemocněl cukrovkou, v té době neléčitelnou nemocí. V jednání byl přímý a dokázal stát za svým názorem i za cenu konfliktu s okolím. Již v mládí musel po konfliktu s katechetou přestoupit z Plzně do Rakovníka, o jeho potížích s hledáním patřičného uplatnění jsme se již zmínili. Na druhou stranu byl vážený a uznávaný.

Lerch byl velice ovlivněn kroneckerem a jeho dílo bylo ve stylu tohoto německého matematika. Řešil konkrétní problémy, ačkoliv publikoval více než dvě stě prací nikdy nenapsal žádnou monografii, ačkoliv v některých oblastech matematiky (eliptické integrály, malmsténovské řady, kvadratické formy) vynikal a rozhodně by byl schopen monografii napsat. Nenapsal ani žádnou učebnici, ačkoliv by to bylo potřebné. Ačkoliv nebyl příliš dobrým učitelem co se týče formy (slabý a jednotvárný hlas ap.), jeho přednášky byly po odborné stránce skvělé. Údajně měl prohlásit, že když nebyl dobrý pro české vysok školy, tak teď tyto zase nejsou dost dobré proto, aby pro ně psal učebnice. Přesto se Lerch zapsal nesmazatelně do českého školství a zejména v sedmdesátých letech, kdy se začalo vyučovat na množinovém základě nepřímo strašil rodiče všech tehdejších školáků. je totiž téměř jisté, že autorem novotvaru množina je právě Matyáš Lerch.

Literatura

[Ba] Balada F.: Z dějin elementární matematiky. Státní pedagogické nakladatelství Praha 1959

[BF] Historie matematiky I. Sborník ze Semináře pro vyučující na středních školách v Jevíčku, srpen 1993. Editoři Bečvář J., Fuchs E. JČMF, Brno 1994

[Be2] Bečvář J. a kol.: Matematika ve středověké Evropě. Prometheus Praha 2001

[Eu] http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

[Ja] Jarošová M.: Souvislost Fibonacciho čísel s jinými matematickými pojmy. In Matematika v proměnách věků IV, editor. E. Fuchs. Akademické nakladatelství Cerm, Brno 2007

[Le] Lepka K.: Historie Fermatových kvocientů (Fermat–Lerch). Edice dějiny matematiky, sv. 14 Prometheus Praha 2000

[Ma1] Mačák K.: Tři středověké sbírky matematických úloh. Prometheus Praha 2001

[Ma2] Mačák K.: Počátky počtu pravděpodobnosti. Edice Dějiny matematiky, sv. 9. Prometheus Praha 1997

[Si] Singh S.: Velká Fermatova věta. Academia Praha 2000

[Sm1] Šimerka V.: Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia: tiskem a nákladem Dr. E. Grégra 1863

[Sm2] Šimerka V.: Síla přesvědčení. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **11**(1881), 75–111

[Sa] Šišma P.: Teorie grafů 1736–1963. Edice Dějiny matematiky, sv. 8. Prometheus Praha 1997

[Sch] Schwabik Š., Šarmanová P.: Malý průvodce historií integrálu. Prometheus Praha 1996

[Vy] Vymazalová H.: Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty. Český egyptologický ústav Praha 2006

[Zn] Znám Š. a kol.: Pohl´ad do dějín matematiky. Alfa Bratislava 1986