

Tématické okruhy k magisterské státní závěrečné zkoušce z matematiky s didaktikou pro 2. stupeň ZŠ

- Státní závěrečná magisterská zkouška v navazujícím magisterském studiu učitelství matematiky pro ZŠ je pouze ústní. Student si vylosuje z každého níže uvedeného oddílu jednu otázku (na přípravu každé otázky bude cca 15 minut):
 - Matematická analýza
 - Algebra
 - Geometrie, teorie množin
 - Didaktika matematiky
- Při zkoušce bude studentovi zadáno z prvních třech oddílů jen hlavní téma (je zde tučným fontem). Uvedené detailní požadavky slouží jen jako vodítko při vašem studiu. Nelze je v žádném případě brát jako dogma. Očekává se vlastní přístup k tomu, co všechno a jakým způsobem lze v souvislosti s jednotlivými tématy zmínit.
- Důraz se klade zejména na **souvislosti** mezi tématy, přičemž zde nemáme na mysli jen témata jednoho oboru.
- Je žádoucí ilustrovat teorii vhodnými **příklady** (a protipříklady).
- Velmi vítány jsou **motivační** úvahy pro diskutované pojmy.
- Pokuste se i o **intuitivní** pohled na některá témata; dále o využití či interpretaci pojmů optikou žáka ZŠ či SŠ.
- V rámci zkoušky z **didaktiky matematiky** si student k otázce vylosuje jeden **příklad**, který se vztahuje k dané problematice.

Matematická analýza

1. Reálné funkce jedné i více reálných proměnných

Definice funkce. Vlastnosti funkcí (monotonie, omezenost, konvexita, skládání, inverze atd., ale i např. spojitost a chování v ryzím okolí bodu). Grafy funkcí a jejich „transformace“. Využití řezů rovinami u grafů funkce více proměnných. Vyšetřování vlastností (včetně vyšetřování průběhu funkce, hledání extrému, což zahrnuje i využití diferenciálního počtu). Základní elementární funkce. Elementární funkce. Alternativní možnosti definice některých elementárních funkcí (pomocí integrálů „jednodušších“ funkcí, mocninných řad, diferenciálních rovnic — diskutujte takto např. logaritmus, sinus a exponenciálu) atd.

2. Limita funkce jedné i více proměnných a limita posloupnosti

Definice limity. Pojem (ryzího) okolí. Intuitivní chápání limity a popis pomocí vhodného obrázku, výpočet, vlastnosti. Kde všude jsme limity potkali/využili (definice spojitosti, definice derivace, asymptoty, limitní přechod u integrálních součtů s nulovou posloupností dělení či zavedení Jordanovy míry, definice nevlastních integrálů, součty a konvergence/divergence nekonečných řad — definice i kritéria, poloměr konvergence, hromadný bod, limita superior, limita inferior) atd.

3. Derivace

Derivace funkce jedné proměnné. Parciální derivace. Geometrická a fyzikální motivace či interpretace. Vlastnosti, výpočet, vztahy s jinými pojmy (např. se spojitostí). Kde všude jsme derivaci potkali/využili (extrémy, průběh funkce, L'Hospitalovo pravidlo, tečna, tečná rovina, věty o střední hodnotě — lze je využít mj. při odhadech, diferenciál, Taylorův polynom, funkční řady, primitivní funkce, diferenciální rovnice) atd.

4. Neurčitý integrál

Definice. Geometrická interpretace. Vlastnosti. Metody výpočtu (vč. zmínky o použití různých triků využitelných nejen zde, jako např. přičtení nuly, vynásobení jedničkou, rozklad na parciální zlomky, goniometrické identity, doplnění na čtverec). Kde všude jsme neurčitý integrál potkali/využili (Riemannův integrál, diferenciální rovnice — předved'te metodu řešení na nějakém konkrétním typu diferenciální rovnice, funkční posloupnosti a řady). Zdůvodnění některých typických integračních postupů (např. linearita, per partes, substituce) atd.

5. Riemannův integrál

Motivace, konstrukce, vlastnosti, výpočet. Souvislost s neurčitým integrálem, souvislosti s nekonečnými řadami, souvislost s Jordanovou mírou. Využití v geometrii a příp. ve fyzice (rozumět myšlence odvozování příslušných vzorců, např. jak dostaneme integrální součty při hledání objemu rotačního tělesa aj.). Přibližný výpočet integrálů (mocninné řady nebo s použitím myšlenek z konstrukce). Alternativní způsob zavedení některých funkcí (integrál jako funkce horní meze) atd. Nevlastní integrály.

6. Posloupnosti a řady

Číselné i funkční posloupnosti. Číselné i funkční řady. Vlastnosti, limita, součet, speciální a významné typy posloupností či řad. Bodová vs. stejnoměrná konvergence

(přenášení vlastností funkcí na limitní funkci či součet funkční řady). Souvislost řad s určitými integrály. Alternativní způsob zavedení některých funkcí (mocninné řady). Aplikace (aproximace funkcí, přibližný výpočet funkčních hodnot, přibližný výpočet integrálů) atd.

7. Aplikace diferenciálního a integrálního počtu

Vyšetřování vlastností funkcí (monotonie, konvexita aj.). Extremální úlohy (vč. slovních úloh a jejich převedení do řeči matematiky). Geometrie (tečna, tečná rovina, obsah, objem, délka křivky, povrch, ale třeba i určování vzdáleností). Aproximace funkce, přibližný výpočet funkčních hodnot. Modelování pomocí diferenciálních rovnic (fyzika, biologie aj.) — rovnice lineární, separovatelné, 1. i 2. řádu atd.

Algebra

1. Binární relace a jejich vlastnosti

Kartézský součin, binární relace, vlastnosti relací, grafy binárních relací. Relace zobrazení, uspořádání, ekvivalence, příklady těchto relací.

2. Algebraické struktury s jednou a dvěma operacemi

Pojem binární algebraické operace, vlastnosti, algebraické struktury s jednou operací (grupoid, pologrupa, grupa) a jejich homomorfismy. Algebraické struktury se dvěma operacemi (polokruh, okruh, obor integrity, těleso) a jejich homomorfismy.

3. Vektorové prostory, lineární zobrazení.

Podprostory vektorového prostoru. Lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost vektoru. Báze a dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektorů v dané bázi. Věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů. Lineární zobrazení vektorových prostorů. Lineární transformace a její matice. Hodnost a defekt lineární transformace. Konjugované (podobné) matice. Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineární transformace.

4. Matice a determinanty, soustavy lineárních rovnic

Typ matice, algebra matic, okruh matic nad tělesem reálných čísel, hodnost matice, inverzní matice. Determinanty, rozvoj determinantu podle řádu či sloupce (Laplaceova věta). Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic a jejich řešitelnost, Frobeniova věta. Metody řešení.

5. Eukleidovský vektorový prostor

Definice skalárního součinu a jeho vlastnosti. Velikost vektorů, Cauchyova-Bunjakovského nerovnost. Odchylka vektorů, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Ortogonální zobrazení, ortogonální transformace.

6. Polynomy, řešení algebraických rovnic

Definice polynomu, operace s polynomy. Kořeny polynomů, rozklad polynomů, největší společný dělitel a nejmenší společný násobek polynomů. Základní věta algebry. Algebraické rovnice a jejich řešení. Binomické a reciproké rovnice. Polynomy více proměnných, symetrické polynomy.

7. Konstrukce číselných oborů

Peanova aritmetika přirozených čísel. Vnoření polookruhu přirozených čísel do okruhu celých čísel. Vnoření okruhu celých čísel do tělesa racionálních čísel. Pojem řezu v množině, druhy řezů. Řezy v množině racionálních čísel. Iracionální čísla, jejich sčítání a násobení. Vnoření tělesa racionálních čísel do tělesa reálných čísel. Rozšíření tělesa reálných čísel na těleso komplexních čísel. Operace s komplexními čísly. Uspořádání číselných oborů.

Geometrie, teorie množin

1. Klasická konstrukční geometrie

Axiómy eukleidovské geometrie (axiómy a postuláty Eukleidovy a Hilbertovy). Eukleidovské konstrukce a sestrojitelné veličiny (geometrická algebra, charakterizace sestrojitelných veličin). Klasické konstrukční úlohy a využití geometrických zobrazení při jejich řešení (např. kvadratura obecného mnohoúhelníku, konstrukce pravidelných mnohoúhelníků, dotykové úlohy).

2. Zobrazovací metody

Středová a rovnoběžná promítání, vlastnosti a přehled zobrazovacích metod (volná promítání, Mongeovo promítání, axonometrie, perspektiva). Zobrazení základních těles (pravidelná tělesa, obecné hranoly, kužely apod.). Základní polohové a metrické úlohy (např. průnik přímky a roviny, vzdálenosti bodů, konstrukce řezů).

3. Afinní a projektivní geometrie

Obecný afinní a projektivní prostor (motivace projektivního rozšíření, algebraické definice). Pojmy incidence, uspořádání a rovnoběžnosti. Vzájemné polohy podprostorů (incidence, různoběžnost, resp. rovnoběžnost, mimoběžnost). Konstrukce a analytická vyjádření (např. průniky a součty podprostorů, příčky). Využití lineární algebry při řešení základních úloh (soustavy lineárních rovnic, determinanty).

4. Eukleidovská geometrie

Obecný eukleidovský prostor (klasický vs. algebraický přístup). Pojem shodnosti. Kolmost, vzdálenost a odchylka podprostorů, objemy rovnoběžnostěnů (definice v rovině a v prostoru a jejich zobecnění). Konstrukce a analytická vyjádření (např. kolmé podprostory, osy). Využití lineární algebry při řešení základních úloh (determinanty, skalární, vnější a vektorový součin).

5. Geometrická zobrazení

Shodná, podobná, afinní, projektivní a konformní zobrazení (definice, vlastnosti a analytická vyjádření). Základní zobrazení a jejich skládání, transformační grupy (zejména pro transformace v rovině). Užití při řešení geometrických úloh (např. u Apollóniových úloh nebo řezů těles).

6. Množiny a kardinální čísla

Ekvivalentní množiny a jejich mohutnost. Definice kardinálního čísla, součet, součin a mocnina kardinálních čísel. Spočetné a nespočetné množiny, mohutnost kontinua. Uspořádání kardinálních čísel, Cantorova–Bernsteinova věta. Budování přirozených čísel jako čísel kardinálních.

7. Uspořádané množiny a ordinální čísla

Uspořádané a dobře uspořádané množiny. Ordinální typy, ordinální čísla a jejich aritmetika. Uspořádání ordinálních čísel. Budování přirozených čísel jako čísel ordinálních.

Didaktika matematiky

- 1. Individuální přístup k žákům, zájmová činnost v matematice**
Vzdělávání žáků vzhledem k jejich specifickým vzdělávacím potřebám. Péče o žáky s problémy v matematice, vzdělávání žáků s poruchami učení, vzdělávání žáků talentovaných. Matematické soutěže, zájmová činnost.
- 2. Obsah kurzu školské aritmetiky. Posupné rozšiřování číselného oboru (čísla přirozená, celá, racionální)**
Přirozená čísla, jejich zavedení na základní škole. Numerace, operace s přirozenými čísly, vlastnosti operací. Čísla celá, zlomky, čísla racionální, numerace, operace.
- 3. Elementární teorie čísel, dělitelnost v oboru přirozených čísel. Využití induktivních a deduktivních metod na základní škole**
Metody určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele daných přirozených čísel, kritéria dělitelnosti a jejich důkazy. Prvočísla, čísla složená. Řešení diofantických rovnic prvního stupně.
- 4. Číselné obory. Intuitivní zavedení reálných čísel na základní škole. Mocniny a odmocniny**
Možnosti zavedení reálných čísel na základní škole. Iracionální čísla vyskytující se na základní škole. Pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Geometrické konstrukce algebraických výrazů.
- 5. Základní pojmy finanční matematiky**
Procentový počet, jednoduché a složené úrokování. Možnosti využití skupinové a projektové výuky v tématu finanční gramotnost.
- 6. Matematická úloha a její řešení**
Metody řešení matematických úloh: experiment, aritmetické řešení, algebraické řešení. Význam geometrického znázornění při rozboru úlohy. Analytická a syntetická metoda při řešení slovních úloh.
- 7. Vytváření představ a pojmů v matematice**
Zavádění základních pojmů v matematice: Axiomy, definice, věty, důkazy matematických vět. Formulace matematických vět a jejich ověřování na základní škole. Příklady chybných definic.
- 8. Rovnice a nerovnice ve školské matematice. Lineární rovnice a nerovnice, soustavy lineárních rovnic, neurčité rovnice**
Způsoby řešení lineárních rovnic a nerovnic, soustav lineárních rovnic a neurčitých rovnic na základní škole. Ekvivalentní úpravy rovnic a nerovnic.
- 9. Rovnice. Kvadratická rovnice, rovnice s neznámou ve jmenovateli**
Druhy kvadratických rovnic. Určení kořenů kvadratické rovnice. Vietovy vzorce. Ekvivalentní a důsledkové úpravy.
- 10. Elementární funkce v učivu matematiky základní školy**
Lineární funkce, funkce nepřímá úměrnost. Využití metod zobecňování a abstrakce při vyvozování pojmu lineární funkce. Způsoby zadání funkcí. Vlastnosti funkcí.

11. **Kvadratická funkce. Funkce racionální lomená**
Metodika zavedení kvadratické funkce. Funkce racionální lomená. Zakreslení grafu. Vlastnosti funkcí. Mezipředmětové vztahy — využití v příkladech z fyziky.
12. **Goniometrické funkce**
Využití podobnosti pro zavedení goniometrických funkcí v intervalu. Goniometrické funkce v intervalu. Jednotková kružnice. Vlastnosti goniometrických funkcí.
13. **Planimetrie v kurzu školské matematiky**
Přístupy k zavádění planimetrických pojmů na základní škole. Úhel, trojúhelník, čtyřúhelník, kružnice, kruh. Vlastnosti těchto útvarů. Axiomatická výstavba geometrie.
14. **Konstrukční úlohy v kurzu školské matematiky**
Základní geometrické konstrukce. Fáze řešení konstrukční úlohy. Řešení konstrukčních úloh s využitím základních vět o určenosti útvarů, množin bodů s danou vlastností, geometrických zobrazení. Konstrukce algebraických výrazů.
15. **Geometrická zobrazení v kurzu školské matematiky**
Shodná zobrazení: osová souměrnost, středová souměrnost, rotace, translace. Podobná zobrazení: podobnost, stejnolehlost. Využití metod manipulativních činností k vyvození jednotlivých zobrazení.
16. **Stereometrie na základní škole**
Postupné zavádění pojmů manipulativní činností. Rozvíjení prostorové představitosti. Mnohostěny, rotační tělesa. Pravidelná tělesa.
17. **Míry geometrických útvarů**
Délka úsečky, obvod a obsah rovinného geometrického útvaru. Povrch a objem tělesa, odvození vztahů.
18. **Elementární kombinatorické úlohy a jejich využití v učivu matematiky 2. stupně ZŠ. Prvky teorie grafů a jejich využití**
Úlohy k rozvoji kombinatorického myšlení na základní škole. Využívané kombinatorické pojmy. Hledání kostry grafu, jednotažky.
19. **Pravděpodobnost a statistika ve školské matematice**
Základní pojmy matematické statistiky. Rozvoj pravděpodobnostního myšlení. Možnosti využití projektové výuky a mezipředmětových vztahů.
20. **Historie matematiky, možnosti využití historických poznámek k motivaci učiva**
Historická období ve vývoji matematiky, významné výsledky. Významní filozofové a matematikové.
21. **Kurikulární dokumenty pro výuku matematiky na ZŠ**
Vývoj vyučování matematice v českých zemích. Osnovy matematiky, standardy, Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Porovnání osnov a RVP.