

Didaktické znalosti obsahu a matematické vzdělávání učitelů

František Kuřina

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Redakci zasláno 13. 6. 2011 / Do tisku přijato 19. 3. 2012

Abstrakt: V úvodu příspěvku jsou naznačeny některé problémy matematického vzdělávání, zejména problém instruktivních a konstruktivních přístupů k učení. V druhé části je srovnáván pojem didaktická znalost obsahu s pojmem didaktika jako tvorba školy. Ukazuje se, že Shulmanem připomínané chybějící paradigma je v české didaktice výrazně zastoupeno. Dále jsou charakterizovány globální a dílčí transformace jako různé pohledy na tvorbu didaktických znalostí obsahu. Problematika porozumění se probírá v souvislosti s dílem Liping Ma a zdůrazňuje se význam tzv. dobré praxe. Ve třetí části příspěvku jsou prezentovány možnosti integrace didaktické a obsahové složky matematiky v učitelském vzdělávání.

Klíčová slova: didaktické znalosti obsahu, matematické vzdělávání, didaktika jako tvorba školy, porozumění, globální a dílčí didaktická transformace, dobrá praxe

1 Úvod

Když jsem v roce 1960 jako mladý učitel s minimální, tj. pětiletou praxí na základní a střední škole, nastoupil na tehdejší Pedagogický institut, považoval jsem za svůj prvořadý úkol přispět k utváření správného obrazu části matematické vědy u budoucích učitelů matematiky. V průběhu padesáti let jsem došel k přesvědčení o nutnosti spojovat teoretické matematické vzdělávání s otázkami pedagogickými. Neměl jsem ambice *pozvednout status učitelské profese*, jak píše o didaktických znalostech obsahu v souvislosti s myšlenkami Lee S. Shulmana T. Janík (2009, s. 23), cítil jsem však, že hlubší matematické vzdělávání nevede nutně k lepším pedagogickým výsledkům. Stále více jsem obracel v matematických disciplínách pozornost k otázkám didaktickým. Shulmanovy myšlenky mně nejen zjevily to, co *již spočívalo a zpola dřímalo v rozbřesku mého poznání* (Džibrán, 1990, s. 50), ale potvrdily, že jsem intuitivně, pedagogickou praxí, dospěl k některým myšlenkám, k nimž došla pedagogická věda. Pak ovšem nastává šok v podobě *Boloňské deklarace* aplikované i na učitelské vzdělávání. „Primární protovědecké profesní vzdělání“ (citováno podle Liessmann, 2008, s. 74) v bakalářském

učitelském studiu považuji za nevhodné. V další části se budu snažit tuto myšlenku zdůvodnit. Není bez zajímavosti, že rozpor mezi matematickým vzděláním učitele a jeho praxí ve škole se pociťoval jako aktuální již před víc než sto lety. V roce 1908 formuloval německý matematik Felix Klein (1849–1925) myšlenku o dvojím zapomínání v přípravě budoucího učitele. Tato myšlenka je podle našeho předčasně zesnulého didaktika matematiky Jaroslava Šedivého (1934–1988) aktuální i v současnosti.

Paradoxnost situace vidíme v této skutečnosti:

Přichází-li budoucí učitel do prvního ročníku univerzity, dávají mu profesori najevo, že bude lépe, když zapomene všechno ze střední školy, protože jeho vědomosti, způsoby vyjadřování a myšlenkové pochody jsou nahony vzdáleny skutečné vědě. Když přichází z univerzity do školy jako učitel, říkají mu starší kolegové, že může klidně zapomenout vědecké poznatky, způsoby myšlení a vyjadřování, protože to při vyučování vůbec nepotřebuje. (Šedivý, 1969, s. 8)

Problém tkví podle mého názoru v tom, že univerzita se snaží zprostředkovat studentu formou přednášek část hotové matematiky, popis logicky utříděné struktury, neukazuje však cesty k matematice. Matematická přednáška často nevede studenty k porozumění a k myšlení, má ráz transpozice poznatků. Reprodukce definic, vět a jejich důkazů, s nimiž se, přiznejme si, někdy spokojujeme u zkoušek, jsou dokladem studentovy paměti, myšlení však nerozvíjí. Je zajímavé, že na tuto problematiku upozorňují nejen matematici, ale i společensky zaměření badatelé. Uvedme několik příkladů.

T. G. Masaryk např. píše:

Univerzita nedělá nic jiného, než že se přednáší. To je hodně málo. Univerzity vznikly v době, kdy poměry byly zcela jiné, nebylo knih... My máme tolik prostředků, že se můžeme vzdělávat jinak, nám není potřeba chodit do přednášek. V mnohých a mnohých oborech je nepotřebné přednášet, jak se přednáší, každému by se měla dát do rukou kniha... Profesor by měl přednášet jen to, co ho zajímá, a co zajímá studenta... čím je nutno doplňovat četbu... Také by se muselo více vést k myšlení. (Masaryk, 1990, s. 50)

Spisovatel Jaroslav Durych zdůrazňuje:

Má-li člověk některou pravdu pochopiti, je... nutno, aby prožil a sám v sobě poznal všechny obtíže, se kterými zápasilo hledání a poznání této pravdy, a všechny potíže, které by hrozily, kdyby této pravdy neznal, či kdyby jí nebylo. (Durych, 2001, s. 95)

Filozof Michal Ajvaz jakoby psal o matematice:

Je čas vrátit se ze sterilního a neskutečného světa hotových forem do nečistého světa vznikání, je třeba pozorně se dívat, jak se formy rodí, protože pouze tento zrod je vlastní skutečností a pravdou našich forem. (Ajvaz, 1997, s. 63)

Americký matematik Robert Courant formuluje svůj názor takto:

V současnosti převládající zdůrazňování deduktivně-logického charakteru matematiky považujeme za velmi nebezpečné. Je sice pravda, že není lehké popsat, co je tvořivý objev nebo úspěšný intuitivní začátek, přesto však právě tyto jevy tvoří jádro i těch nejabstraktnějších matematických výsledků. Krystalicky čistá deduktivní forma je možná cílem matematiky, ale její hybnou silou je intuice. (Courant & Robbins, 1941, s. 2)

A slovenský matematik Tomáš Hecht se vyznává: „Vyučování matematice je především odevzdávání kulturního odkazu. Významnou částí tohoto odkazu je hloubavost, přemýšlení, hledání pravdy. Matematiku bychom měli stavět jako jasný chrám.“ Rozpor mezi tím, co se učí a jak se učí student na univerzitě, a co má učit, a jak má učit ve škole, není tedy vůbec nový.

Příčinu tohoto jevu vidím v tom, že vysokoškolští učitelé se soustřeďují na vlastní předmět, na logickou stránku matematické struktury a nevěnují pozornost tomu, jakou matematiku budou jejich studenti potřebovat. Pro budoucí učitele je patrně důležitá otázka tvorby matematických pojmů a dobré porozumění problematice. Univerzitní učitelé mnohdy neznají středoškolské učebnice a ani nepovažují za potřebné je poznat. Nevěnují pozornost jazykům matematiky a otázky porozumění přenechávají péči studentů. Během semestru není na tyto problémy čas a jejich řešení se tak přesouvá do mnohdy hektického zkouškového období. Zde tkví, zdá se mi, kořeny formalismu v matematickém vzdělávání, možná i zárodky nesprávných didaktických přístupů v praxi budoucího učitele.

Není bez zajímavosti, že analogické problémy je možné vidět i v matematickém vzdělávání techniků. O inženýru, který absolvoval kurz vysokoškolské matematiky, ale nepoznal v praxi a neuměl řešit lineární rovnici, jsme psali v knize *Dítě, škola a matematika* (Hejný & Kuřina, 2009, s. 15). Podobně odtržená od praxe je i matematika na některých středních odborných školách.

2 Didaktika jako tvorba školy

2.1 Didaktické znalosti obsahu a naše didaktika matematiky

Významný americký pedagog a emeritní profesor Standfordské univerzity Lee S. Shulman kritizoval v létech 1984–1985 ostře pedagogický výzkum,

že ignoruje otázky vztahující se k obsahu vyučování. Poukazoval na to, že již více než dvě desítky let se intenzivně provádí výzkum, v němž je vyučovací předmět „neviditelný“ a hovořil v těchto souvislostech o chybějícím paradigmatu... A právě zde se zrodil koncept *pedagogical content knowledge*. (Janík, 2009, s. 23)

Finský pedagog Pertti Kansanen konfrontuje tento ve Spojených státech vzniklý pojem s evropskou tradicí a zdůrazňuje:

Pedagogical content knowledge se stal ústředním konceptem výzkumu vyučování. Často se používá v širším smyslu, ve významu didaktiky (*pedagogy*) obecně. V takovém případě je zde podobnost s německou didaktikou (*Didaktik*). Němečtí didaktikové současně začali používat paralelní pojem školní pedagogika/didaktika (*school pedagogy; Schulpädagogik*)... Tímto pojmem odkazují k širšímu kontextu a příbuzným vědám – sociálním a politickým. (Kansanen, 2007, s. 18)

V Shulmanově smyslu se vymezuje pojem *didaktické znalosti obsahu* (jak se u nás předkládá *pedagogical content knowledge*; Janík, 2007, s. 7) jako „nejúčinnější analogie, ilustrace, příklady, vysvětlení, důkazy, zkratka způsoby reprezentace a popisu předmětu, který jej činí srozumitelným pro jiné“ (Shulman, 1986, s. 9). „Pedagogical content knowledge je sám o sobě úzký koncept. Znamená profesní znalosti učitele o tom, jak pro žáky připravit obsah (content) tak, aby učení bylo co nejefektivnější“ (Kansanen, 2007, s. 16). Jestliže jej používáme ve smyslu didaktiky, označujeme celek jeho částí, což může vést k nedorozumění¹. A protože se ve vzdělávacím procesu prolínají nejrůznější složky (předmětně didaktické, psychologické, společenské...) navrhol jsem v článku *Co to je vlastně didaktika* (Kuřina, 2005) chápat *didaktiku jako tvorbu školy* a např. didaktiku matematiky jako *tvorbu školní matematiky*.

Tento aspekt znamená orientaci didaktiky jak k teorii, tak i ke školní praxi. Na didaktice jako tvorbě školy se nepodílejí jen „akademičtí“ vědci, ale i pracovníci ministerstva školství a školské správy na všech úrovních, všichni ředitelé škol

¹ Tento způsob je dosti běžný v krásné literatuře. Např. v knize V. France *Svědék neposkrvněného početí* (2010) se o titulní události můžeme dočíst pouze na 7 stránkách první z 26 povídek.

a učitelé od univerzitních profesorů až k učitelkám a učitelům málotřídek. Do didaktiky musíme zahrnout i naši současnou reformu vzdělávacího systému. (Kuřina, 2005)

Pojetí didaktiky jako tvorba školy je podle mého názoru v souladu s názory Komenského i s názory Marešovými. Připomeňme v této souvislosti např. tyto jejich myšlenky:

Naší didaktiky začátkem koncem budiž: vypátrati a najíti způsob, podle něhož by ti, kdo učí, učili méně, ti však, kdo se učí, naučili se více; podle něhož by školy měly méně hluku, nechuti a marné práce, avšak více klidu, rozkoše a pevného výsledku. (Komenský, 1905, s. 2)

Mareš mluví o didaktice přikloněné k reálnému životu, jejímiž klíčovými pojmy jsou

průběh učení, přístupy k učení, strategie učení, zájem o učení, výsledky učení, adaptace na kontext učení, kontext, pedagogické prostředí, pedagogické situace, cíle, kurikulum, učební úloha, struktura učiva, základní pojmy učiva, žák, žákova zkušenost, žákova percepce požadavků školy. (Mareš, 1998, s. 41)

V rámci didaktiky jako tvorby školy můžeme chápat Shulmanův pojem *didaktické znalosti obsahu* jako významnou složku didaktiky. Výzkumné práce v didaktice se pak mohou odehrávat v rámci jednotlivých složek takto široce chápané disciplíny. Vidět při dílčích výzkumech celek je podle mého názoru velmi důležité. Zdá se mi, že PCK (což je v mnoha publikacích velmi frekventovaná zkratka pro *pedagogical content knowledge*) „žije“ vlastním životem, což se může stát pro vzdělávání nebezpečným, neboť to dává příležitost zabývat se izolovaně jen jednou (i když důležitou) stránkou vzdělávacího procesu. Nemám nic proti PCK učitele driblingu a přiznání, že „moje PCK je vyšší v gymnastice než v basketbalu“ (Dobrý, 2007, s. 63) nás může potěšit, ale...

Doložme nyní, že naší didaktice matematiky syndrom Shulmanova chybějícího paradigmatu nehrozí. Např. reprezentativní *Žlutá kniha* Milana Hejného et al. (1989) je z velké části věnována otázkám, jak učinit matematiku srozumitelnou studentům. Tak např. můžeme uvést: pojem rovnice je ilustrován 25 různorodými příklady (Hejný et al., 1989, s. 190), odvození součtových vzorců pro goniometrické funkce je vysvětleno velmi výmluvnými reprezentacemi (Hejný et al., 1989, s. 470), řešení řady úloh je ilustrováno grafy

(např. rovnice s absolutní hodnotou; Hejný et al., 1989, s. 206), je prováděna diagnostika rozvoje stereografických představ (Hejný et al., 1989, s. 390). Hejného kniha se rodila současně se Shulmanovým pojmem didaktické znalosti obsahu a tento termín v ní nemůže být obsažen, ale Shulmanovy požadavky jsou v ní zastoupeny bohatě. Na úrovni matematického vzdělávání učitelů prvního stupně naší školy bychom mohli podobné závěry doložit na knize *Dítě, škola a matematika* (Hejný & Kuřina, 2009).

Shulmanovy požadavky věnovat významnou pozornost obsahu jednotlivých oborů vzdělávání posouvá oborové didaktiky, které jsou částí didaktiky, do pedagogiky. Je to v souladu i se schématem v citovaném Kansanenově článku. Tím spíš je ovšem zarážející, že Shulmanovy ideje z osmdesátých let nejsou reflektovány např. v monografiích Průchy (2005) a Kalhouse a Obsta (2002). Paradoxní rovněž je, že 15 let po Shulmanovském obratu didaktiky k obsahu a v rozporu s tradicemi naší didaktiky se v souvislosti s naší reformou reprezentovanou *Bílou knihou* naše škola orientuje tak,

jako by její vyučování mělo za úkol rozvíjet pouze abstraktní teoretické myšlení... Rámcové vzdělávací programy neobsahují analýzy, které by vedly k jistému rozlišení základního, fundamentálního a rozšiřujícího učiva, které by označily to, co je zcela podstatné a je jádrem vědění, co lze chápat jako méně podstatné. (Skalková, 2004, s. 129)

Zařazením kompetencí do struktury vzdělávání podstupujeme hrozbu, že učivo se přestává pokládat za podstatný prvek školního vzdělávání. Vždyť univerzální kompetence je vlastně možné trénovat na libovolném obsahu. Ignoruje se tak poznatek, že škola napomáhá člověku tím, že mu nabízí stabilní obraz světa s poznatky, které ho vytvářejí. (Kašćák & Pupala, 2009, s. 132)

2.2 Globální a dílčí didaktická transformace

Podstatnou složkou přístupu k Shulmanovu pojmu didaktické znalosti obsahu je transformace oboru (matematiky, fyziky, angličtiny,...) do školské praxe. To se ovšem vždy bude odehrávat v určitém rámci, který tvoří celková koncepce disciplíny. Tvorbu této koncepce budu nazývat *globální didaktická transformace*. Uvedme dva příklady.

V šedesátých letech minulého století byla v matematice téměř na celém světě přijata idea, jejímž zastáncem byl např. americký psycholog Jerome S. Bruner, že základem vzdělávání mají být obecné struktury oboru. Matematika

na základní škole měla být založena na pojmech množina, relace, algebraické operace a jejich vlastnostech. V tomto rámci se pak uskutečňovaly dílčí didaktické transformace, které se soustřeďovaly např. na to, jak porozumět přirozeným číslům jako kardinálním číslům konečných množin, jak dovést žáky k poznání, že třikrát dvě neznámá $2 + 2 + 2$, ale počet prvků kartézského součinu množiny s třemi prvky s množinou se dvěma prvky, jak vysvětlit, že trojúhelník ABC je množina všech bodů X všech úseček AY , kde Y je libovolný bod strany BC , atp. Zcela jinak jsou chápány didaktické znalosti aritmetického obsahu, vyjdeme-li z jazykových zkušeností dítěte a z přirozeného pojetí historickým přístupem ovlivněného chápání čísel odrážejícího kvantitativní stránku světa žáka, v němž se přirozeně prolíná např. ordinální, kardinální, operátorový a „označovací“ přístup. Lze dokonce doložit, že praxe školy si vynutila změnu globální didaktické transformace učiva, ačkoliv bylo toto učivo z hlediska matematického bez závad.

Podobný příklad lze uvést i z geometrie. Euklidův a Hilbertův logický přístup k disciplíně založený na studiu struktury ukotvené v axiomech byl v řadě zemí transformován do vzdělávání, avšak s výsledky velmi neuspokojivými. Relikty tohoto pojetí můžeme doložit i dnes. Např. na středních školách se nestudují prioritně geometrické vlastnosti prostoru, v němž žáci žijí, ale geometrické struktury (planimetrie, stereometrie, analytická geometrie...). Takovýto přístup byl aplikován i na škole základní. Sám jsem byl v roce 1985 svědkem toho, jak v jedné šesté třídě moskevské základní školy se žáci v podstatě zpaměti učili důkaz věty, že přímka, která obsahuje vnitřní bod trojúhelníku, protíná jeho hranici. O mém pojetí didaktické struktury geometrie jsem psal dosti podrobně v článku (Kuřina, 2009).

Didaktika jako tvorba školy nebo didaktické znalosti obsahu v širším slova smyslu by měly studovat i problémy globální didaktické transformace, což přirozeně souvisí s otázkami kurikulárními.

Uvedme ještě další příklad *dílčí didaktické transformace*: Pythagorova věta.

Matematický obsah pojmu je jednoznačně určen formulací: *V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a , b a přeponou c platí*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Zpracování tohoto učiva bude záviset na cílech vyučování v příslušné třídě, na vyspělosti jejích žáků, ale i na čase, který bude mít učitel k probrání tématu k dispozici. Jádro porozumění Pythagorově větě tkví v pochopení poznatku, že délkami odvěsen je určena délka přepony. Tuto skutečnost lze přiblížit žákům dosti snadno, vědí-li, že trojúhelník je určen dvěma stranami a úhlem, který tyto strany svírají. Odvěsny svírají pravý úhel, délka přepony tedy je délkami odvěsen určena. Složitější je otázka nalezení této závislosti. Některé žáky nebo některou třídu přesvědčíme několika příklady, tedy vlastně neúplnou indukcí, vyspělejší kolektiv bude pracovat např. s dvojím umístěním shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami a , b do čtverce se stranou dlouhou $a + b$. Matematicky vyspělá třída nebo jedinci se zájmy o matematiku by mohli ocenit některý ze „solistických“ důkazů (viz např. Hejný & Kuřina, 2009, s. 49–69, kde lze nalézt i srovnání historické a mezinárodní). V každém případě nelze ovšem vynechat motivační a aplikační úlohy, které s problematikou souvisejí.

2.3 Praxe školy

Shulmanovy ideje o didaktické znalosti obsahu orientují pedagogiku k praxi školy. Z praxe školy vychází a k praxi školy se vrací ve svém díle i americká autorka čínského původu Liping Ma. K její publikaci *Znalost a výuka elementární matematiky* (Ma, 1999) napsal Shulman předmluvu, v níž zdůrazňuje autorčin teoretický příspěvek k didaktice matematiky. Dosti podrobná recenze této publikace vyšla v *Pokrocích matematiky, fyziky, astronomie* (Barbeau, 2008).

Sdílím rozčarování L. Shulmana nad Shawovým aforismem „Kdo umí, pracuje, kdo neumí, učí“ (Shulman, 1986), nemohu však plně souhlasit s jeho názorem, že platí: „Kdo umí, pracuje, kdo rozumí, učí“. Chápu, že takto by to mělo být, je to ovšem spíše zbožné přání než realita. S tím se ovšem můžeme setkat častěji. Např. v r. 1991 byl ve Spojených státech přijat program *America 2000: An Educational Strategy*, který zcela nerealisticky vyhlásil, že „každá škola v Americe zajistí, že se všichni žáci naučí dobře uvažovat tak, aby byli připraveni na odpovědné občanství, další učení a produktivní zařazení do moderní ekonomiky“ (citováno podle Průcha, 2005, s. 93). Podobně podle tzv. *Bílé knihy* se má v ČR do r. 2010 „dosáhnout vyšší kvality a funkčnosti vzdělávání“ pouhou „tvorbou nových vzdělávacích a studijních programů“ (Kotásek et al., 2001, s. 18). Že existují učitelé, kteří učí, aniž by rozuměli učivu, dokazuje zmíněná Liping Ma (1999) řadou úloh. Doložme to jednou z nich. Učitelé měli řešit úlohu:

Vymyslete příběh nebo slovní úlohu, jejíž řešení by vedlo k výpočtu

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}.$$

Ačkoliv by patrně úloha najít interpretaci výpočtu $6 : 3$ nedělalo žádnému učiteli potíže, našlo vhodnou situaci k dané úloze pouze 5 % ze skupiny amerických a 90 % ze skupiny čínských učitelů. Úlohu jsme zadali i skupině našich učitelů, kteří byli úspěšní v 35 %. Popsané šetření je velmi málo zdokumentované a nelze je proto brát jako podklad pro jakékoli srovnání amerických, čínských či našich učitelů. Závěr, že existují učitelé, kteří ne plně rozumějí elementární matematice, však jistě učinit můžeme. Je-li těchto učitelů promile, procento či 20 % ovšem určit nelze. Přitom jsou zajímavé i některé reakce našich učitelů na úlohu, např. nic mě nenapadá, tohle nevymyslím, na tuto úlohu nemám dostatečnou fantazii...; dělení polovinou interpretují často jako dělení na poloviny, tedy dělení dvěma atp. Řada přirozených řešení popisované úlohy je ovšem zřejmá, např.: Kolik püllitrových hrnků lze naplnit z $1\frac{3}{4}$ litru čaje? Liping Ma dovozuje, že neúspěchy amerických učitelů spočívají zejména v tom, že důkladně nerozumějí matematice, ačkoliv jejich vzdělání je formálně „lepší“ než vzdělání úspěšnějších čínských kolegů a kolegyně.

Porozumění matematice, a to porozumění důkladné (*profound understanding of fundamental mathematics*; Ma, 1999, s. 118), znamená (Barbeau, 2008, s. 244–245):

1. Mít smysl pro logickou strukturu matematiky.
2. Disponovat určitým souborem znalostí.
3. Zvažovat četná hlediska, analyzovat jejich výhody a nevýhody.
4. Uvědomovat si význam a rozvíjet klíčové ideje.
5. Mít smysl pro souvislosti.
6. Chápat kurikulum jako celek.

Zdokonalení matematického vzdělávání nebude dosaženo ani pouhou změnou kurikulárních dokumentů, ani útokem na učitele a školy, jejichž studenti nemají patřičnou úroveň, ale pouze působením a prací zasvěcených, přemýšlivých a pečlivých učitelů na straně jedné a prostředím, které podporuje profesionální růst na straně druhé. Tedy „dobrou praxí“. Tomuto

termínu budeme rozumět ve smyslu „účinného prostředí, v němž se žáci učí“ (*powerful learning environment*) J. Mareše (2009, s. 176) s těmito rysy:

- a) Rozvíjí konstruktivní, kumulativní a cílené učení u všech žáků.
- b) Vyvažuje učení prostřednictvím osobního zkoumání a objevování systematickým školním vzděláváním a řízeným poznáváním.
- c) Umožňuje, aby se žákově učení odehrávalo v co největší míře v autentickém kontextu, který žákovi otevírá osobní smysl toho, čemu se učí.
- d) Přizpůsobuje se potřebám žáků, poskytuje jim adresnou pomoc, která bere v úvahu stupeň jejich samostatnosti a jejich individuální rozdíly.

Několik příkladů dobré praxe je uvedeno v monografii *Matematická gramotnost a vyučování matematice* (Hošpesová et al., 2011).

3 Matematické vzdělávání učitelů

3.1 Tradiční univerzitní vzdělání učitelů

Má-li učitel dobře učit matematiku, musí matematiku dobře znát. Základem učitelského studia budoucího učitele matematiky je tedy důkladné studium oboru. A jednotlivé oblasti matematiky se historicky konstituovaly do určitých struktur, jejichž studium je nutno budoucímu učiteli zprostředkovat. A protože matematika je logicky budovaná disciplína, začneme definicemi základních pojmů, případně formulacemi axiomů a postupně odvozujeme věty příslušné oblasti matematiky. Systém definice, věta, důkaz je historicky prověřený a je relativně „produktivní“, v poměrně krátkém čase získáme významné výsledky. Kdyby se podařilo tímto způsobem v bakalářském studiu vypěstovat matematiky, mohli bychom v navazujícím magisterském studiu rozvíjet vzdělání učitelské. Bohužel, podle mých zkušeností, se ani z vynikajících středoškoláků za tři roky matematici nestanou. I většina dobrých studentů se naučí příslušné definice, věty a důkazy, hlubší porozumění oboru jim však zpravidla chybí. Kromě nich ovšem existují studenti, kteří učivo nezvládnou. Ti odpadnou, a z hlediska vyučování to nebude žádná škoda.

Některé problémy spjaté s učitelským vzděláváním jsem naznačil v úvodu. Nejsem zastáncem teze: Nejdříve je třeba se něco naučit a pak hledat, zda tomu i porozumím. Podle mého názoru je právě opačný přístup správný: otázky vedou k problémům, porozumění a pochopení souvislostí je základ

procesu učení. Vyučování matematice pro budoucí učitele by nemělo mít charakter klasického schématu matematické vědy: definice, věta, důkaz. Nejen z toho důvodu, že nefunguje dobře: zakládá i nesprávný přístup k matematickému vzdělávání na základní a střední škole. Vzdělávání by mělo spíše klást otázky, a to především prostřednictvím úloh, učit vidět potřebu zavádění pojmů, učit hledat formulace definic, včetně úvah o možnostech definovat různé pojmy různě. Další etapou je řešení úloh, které vedou k domněnkám či jejich vyvracení či dokazování, tedy až k větám a jejich důkazům. Při řešení úloh je velmi poučné srovnávání různých přístupů a různých metod. Řešení úlohy, ale i formulace definice či důkazu věty, není dáno pouze příslušnou matematickou strukturou, nejen úrovní předchozích znalostí, ale i poznávacími schopnostmi, úrovní intuice a tvořivosti toho, kdo se učí matematiku, tedy toho, kdo matematiku v tomto smyslu tvoří. Srovnání probírání téže problematiky s různými znalostmi a zkušenostmi je neobyčejně poučné a podnětné.

Na základě celoživotních zkušeností a studia literatury jsem přesvědčen, že nejdůležitější forma kultivace didaktických znalostí obsahu učitele matematiky se rodí a pěstuje v samém průběhu učitelského vzdělávání, v němž od samého začátku jsou spjaty odborně matematická a didaktická složka, přičemž jejich sjednocení je zabezpečeno důrazem na proces utváření matematických pojmů a postupů, při soustavné péči o porozumění pojmům, pěstování příslušných činností a komunikaci. Uvítal jsem proto Janíkovu tezi: „Má-li u budoucích učitelů docházet ke kognitivní integraci znalostí obsahových se znalostmi didaktickými, je třeba kurikula učitelského vzdělávání koncipovat jako kurikula integrovaná“ (Janík, 2009, s. 90). Pokud vím, není Janíkem požadovaná integrace obsahových a didaktických znalostí na žádné z našich univerzit plně realizována. Ty oblasti oborového vzdělávání budoucího učitele, které mají tematicky nebo metodologicky blízko k učivu základní nebo střední školy, by podle mého názoru měly o integraci v tomto smyslu usilovat. O dvou takových programech se nyní zmíním. Z nejdůležitějších inspiračních zdrojů uvádím práce (Hejný et al., 1989; Polya, 1962; Hadamard, 1996).

3.2 Didakticky orientované matematické vzdělávání

První příklad, který uvedu, je ovlivněn didaktickým nazíráním M. Hejného a realizuje se v úvodu studia budoucích učitelů matematiky základních a středních škol na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze podle

učebních textů (Hejný & Stehlíková, 2000; Stehlíková, Hejný, & Jirotková, 2005).

V *Úvodu do studia analytické geometrie* (Stehlíková et al., 2005) autoři zdůrazňují:

Při studiu budeme uvažovat o tom, jak je možné tu nebo onu myšlenku analytické geometrie názorně zpřístupnit žákům střední nebo základní školy. Tento cíl zdánlivě náleží do předmětu, který se nazývá „Didaktika“, a nikoli do analytické geometrie. Na druhé straně podle našich zkušeností a podle našeho přesvědčení každé hluboké zamyšlení se nad tím, jak budeme tu nebo onu část matematiky vyučovat, nám přináší nové, hlubší a ucelenější poznání matematiky samotné.

Dále autoři připomínají, že tato myšlenka pochází již od Seneky a nově ji uvádí Hans Freudenthal a pokračují:

Kromě toho představa, že jednou sám bude podobné věci učit, motivuje posluchače k větší intenzitě učení, prosvětluje jeho práci radostí z očekávaného, mění jeho postoj k předmětu. Nepříliš povzbudivé je učení pro jednorázovou zkoušku, radostná ale je příprava pro práci s žáky. (Stehlíková et al., 2005, s. 7)

Důležité je, že i proces řešení úloh spojují autoři s budoucí profesí studentů: *poznávání vlastních myšlenkových pochodů při řešení úloh je výrazným pomocníkem při poznávání myšlenkových pochodů žáků* (Hejný & Stehlíková, 2000, s. 3).

Je přirozené, že v didakticky koncipované analytické geometrii nemohou autoři začít definicí n -dimenzionálního prostoru, ale využívají zkušeností studentů, aby se postupně do té n -té dimenze „vyšplhali“ po „dimenzionálním žebříku“ (Stehlíková et al., 2005, s. 78). Studenti spojení matematické teorie s otázkami didaktickými velmi vítají, neboť vidí aplikace toho, co se učí, v pedagogické praxi, nacházejí smysl probírané teorie a hlouběji problematice rozumějí.

Druhý matematický předmět didakticky orientovaný, o němž se stručně zmíním, se nazývá *Vybrané partie elementární matematiky* a po čtyři roky jsem ho vyučoval na Pedagogické fakultě Univerzity Hradec Králové (dvě hodiny týdně). Studenti měli k dispozici knihu *Podivuhodný svět elementární matematiky* (Kuřina & Půlpán, 2006). Uvedu nyní několik poznámek o práci v předmětu a čtyři názory studentů. Didakticky poučným tématem je např. osvětlení role kalkulů v matematice. Zde jsou důležité příklady

z historie, které vrcholí porovnáním původního Heronova důkazu známého vzorce pro obsah trojúhelníku s jeho „vykalkulováním“ pomocí kosinové věty a syntetickým a analytickým odvozením věty o Apollóniově kružnici. Podrobněji jsou tyto otázky zpracovány v mé publikaci z roku 2011. Pravidla, jimiž se kalkuly řídí, vedou ke konstrukci algebraických struktur – tato idea prostupuje vyučování matematice od první třídy po univerzitu. Naznačme dále možnost přístupu k pojmu *metrický prostor* v didakticky orientované výuce učitelů.

Začínáme diskusí o měření délek v praxi. Příklady otázek a úloh:

1. Co je výsledkem měření délek?
2. Zvolte a) kolineární body A, B, C,
b) nekolineární body A, B, C.
Porovnejte součet každých dvou ze vzdáleností AB , BC , AC se vzdáleností třetí.
3. Jaké číslo je výsledkem měření délek?
4. Porovnejte měření délek „v terénu“ a v geometrii (rovný terén bez překážek).
5. Jak bychom určili vzdálenost ve městě se systémem ulic, které jsou buď navzájem rovnoběžné nebo k sobě kolmé.
6. Co je to vzdálenost?
Po diskusi bychom měli dojít k definici euklidovské vzdálenosti a taxivzdálenosti.
7. Jmenujte několik pojmů založených na vzdálenosti (kružnice, kruh, osa úsečky, elipsa...).
8. Zobrazte každý z těchto útvarů v euklidovské metrice a v taximetrice.

Následuje diskuse vyúsťující v definici metrického prostoru a hledání dalších metrik.

Tradiční univerzitní vzdělání začíná axiomatically formulovanou definicí metrického prostoru, po níž může, ale nemusí, následovat soubor úloh. Pochopí-li student, jak ovlivní změna metriky charakter pojmů na ní založených, snáze pochopí vznik neeuklidovských geometrií – jako důsledek změny implicitních definic základních pojmů. To je další motiv,

který prostupuje celé vzdělávání. V celém kurzu dbáme na různé způsoby vyjadřování, zejména pak na vizualizaci pojmů a postupů. Studenti kladně hodnotí, že mají možnost poznat realizaci téže učební látky několika autory, zejména pak si všímáme, jak některé matematické ideje byly realizovány v různých dobách v různých učebních textech. Snažím se ukazovat, že nejen řešení úloh, ale i volba a zavedení pojmů, formulace a důkazy vět nejsou určeny pouze strukturou předmětu: mnohdy jsou ovlivněny cíli budované teorie a založením autorů.

Studentka Marie (4. roč. aprobace matematika – dějepis) hodnotí předmět takto:

Po delší době matematiky pouček, vět, definic... bez hlubšího poznání, jsem mohla znovu vnímat matematiku srozumitelně a krok za krokem... Výuka měla jasný cíl, a to ten, naučit nás více matematicky přemýšlet a uvažovat.

Studentka Lucie (4. roč. aprobace matematika – biologie) píše:

Z celkového pohledu bych tento předmět hodnotila jako jeden z nejzajímavějších a nejpřínosnějších, se kterým jsem se během studia setkala. Zajímavé bylo, že k řešení problémů většinou stačily středoškolské znalosti. Řešení navíc byla často překvapivá a překvapivě jednoduchá, přestože se úlohy někdy zdály zpočátku neřešitelné... Úlohy nutí žáky přemýšlet a ne pouze dosazovat do vzorců. Můžeme tak částečně odstranit strohé formální vědomosti žáků. Na příkladech lze žákům dobře ukázat, že matematika může být zábava.

Studentka Daniela (4. roč. aprobace matematika – fyzika) napsala:

Tento předmět mě bavil. Byl dán prostor naší tvořivosti a nápadům, což, řekněme upřímně, je na VŠ vzácností. Sama se něco naučím jen tehdy, když onu zákonitost pochopím, lépe sama objevím.

Student Zdeněk (4. roč. aprobace matematika – informatika) formuluje svůj názor na výuku slovy:

Po několika letech a předmětech matematicky laděných se po nás chtělo více, než se nám řeklo, resp. víc než jen přednést naučené postupy. Na matematice nejvíce obdivuji možnost myslet a hledat, vymýšlet si atd.... a to se mi dostalo – děkuji.

3.3 Princip pedagogického paralelismu

Jako doklad snah o řešení zde studovaných otázek v minulosti, ale i jako doklad vývoje mých pedagogických názorů si dovoluji ocitovat zde odstavec ze svého příspěvku *Matematika a didaktika v učitelském vzdělávání* předneseného na Celostátním semináři kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky v r. 1996.

Výsledkem mého zamyšlení nad stylem výuky matematiky v učitelském vzdělávání je formulace principu pedagogického paralelismu. Jeho nejdůležitější rysy lze shrnout takto: Hlavní složkou profesionální přípravy budoucího učitele nejsou samotné přednášky z určitých partií matematiky doplněné přednáškou z didaktiky matematiky, ale sám proces postupného ovládnutí matematiky studentem. Učitel se připravuje na budoucí povolání především tím, jak se sám matematiku učí. Vyučování matematice na střední škole a studium matematiky na univerzitě jsou úzce spjaté pedagogické procesy. Jejich paralelismus spočívá na těchto zásadách:

1. V obou pedagogických procesech jde o postupnou konstrukci soustavy poznatků, a ne o předávání informací o uzavřené části matematiky.
2. Je-li hlavním cílem vyučování matematice kultivace myšlení, musíme tuto složku pěstovat nejen na škole střední, ale i na škole vysoké.
3. Ačkoliv je úroveň abstrakce v uvažovaných vzdělávacích stupních různá, je účelné založit učení na zkušenosti těch, kteří se učí. Žáci získávají zkušenosti při nejrůznějších činnostech (experimentování, modelování, řešení úloh, hraní her...), zkušenosti budoucích učitelů se utvářejí při didaktických a matematických aktivitách.
4. Kostrou obou pedagogických procesů by měly být otázky, úlohy a problémy. (Kuřina, 1996)

4 Závěry

Podle mého názoru by matematické vzdělávání budoucích učitelů mělo být od samého začátku zaměřeno na konstrukci matematických pojmů, nikoliv na předávání hotových, přesně definovaných struktur. Budoucí učitel by měl na vlastním matematickém vzdělávání pocítit, že podstatnou složkou vzdělávacího procesu je porozumění problematice, které se rozvíjí především kladením otázek, řešením problémů, zaváděním pojmů a konstrukcí struktur.

Paralelně s didakticky orientovaným matematickým vzděláváním by se realizovalo specifické vzdělání didaktické a pedagogické. Takovýto přístup není patrně možný při dvojstupňovém vzdělávání, v němž bakalářský stupeň je orientován na „univerzální“ oborové vzdělání, které je ovšem, zvláště při současné úrovni absolventů středních škol přijímaných na univerzity, na relativně nízké úrovni.

Základní otázka spočívá tedy podle mého názoru v tom, jak koncipovat učitelské vzdělání jako školu myšlení, a nikoliv jako zařízení přenosu určité „vědy“ do poznámek studentů. Myšlení rozvíjí student řešením problémů. V učitelském matematickém vzdělávání to nebudou patrně hluboké problémy matematické, ale problémy spjaté s vyučováním. Patří sem, jak už jsem zmínil výše, otázky zavádění pojmů, formulace definic, metody řešení úloh, způsoby argumentace a dokazování tvrzení. Nezasťírám, že jsou tyto problémy těžko řešitelné, opakují však, že základ rozvíjení didaktických znalostí obsahu vidím v dobře koncipovaném univerzitním učitelském vzdělávání. Tím ovšem netvrdím, že možnosti dalšího rozvíjení didaktických znalostí obsahu, tedy např. didaktická rekonstrukce, posthospitační rozbor, studium videozáznamů výuky či tvorba úloh (Janík, 2009, s. 32), by se neměly realizovat. Naďa Stehlíková a Marie Tichá upozorňují, že se v poslední době do oblasti metod a problémů zkoumaných v didaktice matematiky „dostává celý socio-kulturní kontext vyučování a učení se“ (Stehlíková & Tichá, 2011).

Dovolím si v této souvislosti připomenout na závěr úvahu Karla Kosíka (1926–2003) o Descartovi a Komenském.

Dne 8. listopadu 1620 se René Descartes zúčastnil v řadách císařských vojsk bitvy na Bílé Hoře². Zakladatel novověké filozofie stál na straně vítězů a ve stejném znamení ovládla Evropu i svět jeho univerzální metoda, návod, jak se člověk může stát „pánem a vlastníkem přírody“. Descartes přichází do Čech, do cizí země, jako vítěz, a Komenský v důsledku osudové porážky prchá z vlasti jako vyhnanec. Toto setkání – nesetkání dvou velkých osobností sedmnáctého století naznačuje souvislosti filozofie a dějin.

Pomocí vědy a techniky, ale na základě novodobého, tj. karteziánského rozvržení skutečnosti rozpoutal člověk procesy, které běží, „kvaltují“ svým vlastním chodem, zatahují lidstvo do svého zrychlujícího se fungování a spoutávají je. Nastala epocha nové závislosti. Otrok byl majetkem svého pána, a závisel na něm, nevolník byl připoután k panské hroudě, proletář ke stroji, který byl vlastnictvím

² Descartova účast v bitvě není historicky doložena.

kapitalisty. Dnešní člověk je připoután k fungujícímu systému, patří k němu jako jeho příslušenství, většinou o této závislosti neví a dobrovolně se jí podřizuje. Doba si vytváří zvláštní, zcela osobitý životní styl, který je možno nejhodněji charakterizovat termínem ze slovníku Komenského: kvaltovat (z německého Gewalt – násilí, síla).

Kdo kvaltuje, nemá čas se zastavit a ohlédnout, jeho život probíhá v jednom kole. Moderního člověka pohání kvaltování, které je spojeno se slepotou a mráкотou, se šalbou a nepravdou, se strastmi, s otroctvím a porobou. Kdo kvaltuje, zapojuje se do proudu a nechá se jím unášet: je postrkován, tažen, hnán, nemůže se zastavit ze strachu a v obavě, že něco zamešká, a tak promeškává podstatné – svůj život. Kvaltování požívá skutečnost a degraduje ji na ulpívání zdánlivosti novinek a senzací. Kvaltování probíhá jako transformace, v níž se lidstvo mění na populaci, jedinci na exempláře, ze Země se stává grandiózní laboratoř, v níž se za účasti vědců, inženýrů, manažerů, politiků a ovšem také ideologů provádí experiment s přírodou i lidmi. (Kosík, 2004, s. 161)

Jak obstojí v tomto „kvaltování“ naše škola? Byl bych rád, aby rozvíjení myšlení ve vzdělání univerzitním i nižším nebylo utopií.

Literatura

- Ajvaz, M. (1997). *Tajemství knihy*. Brno: Petrov.
- Barbeau, E. (2008). Základem úspěchu jsou dobří učitelé. *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie*, 53(4), 341–345.
- Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is mathematics*. London: Oxford University Press.
- Dobrá, L. (2007). Tělesná výchova a pedagogical content knowledge. In T. Janík, et al., *Pedagogical content knowledge nebo didaktická znalost obsahu?* (s. 53–66). Brno: Paido.
- Durych, J. (2001). *Eseje o umění*. Brno: Host.
- Džibrán, Ch. (1990). *Prorok*. Praha: Vyšehrad.
- Franc, V. (2010). *Svědék neposkvrněného početí*. Třebíč: Akcent.
- Hadamard, J. (1996). *The mathematician's mind*. Princeton: University Press.
- Hejný, M. et al. (1989). *Teoria vyučovania matematiky 2. (Žlutá kniha)*. Bratislava: SPN.
- Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.
- Hejný, M., & Stehlíková, N. (2000). *Elementární matematika*. Praha: Pedagogická fakulta.
- Hošpesová, A. et al. (2011). *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita.
- Janík, T. (2009). *Didaktické znalosti obsahu a jejich význam pro oborové didaktiky, tvorbu kurikula a učitelské vzdělávání*. Brno: Paido.
- Janík, T. et al. (2007). *Pedagogical content knowledge nebo didaktická znalost obsahu?* Brno: Paido.
- Kalhous, Z., & Obst, O. (2002). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

- Kansanen, P. (2007). Oborové didaktiky jako základ znalostní báze pro učitele – nebo tomu budeme raději říkat pedagogical content knowledge? In T. Janík, et al., *Pedagogical content knowledge nebo didaktická znalost obsahu?* (s. 11–22). Brno: Paido.
- Kašćák, O., & Pupala, B. (2009). *Výchova a vzdelávanie v základných diskurzoch*. Prešov: Pokus.
- Komenský, J. A. (1905). *Didaktika veliká*. Praha: Dědictví Komenského.
- Kosík, K. (2004). *Poslední eseje*. Praha: Filosofia.
- Kotásek, J. et al. (2001). *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice*. Bílá kniha. Praha: MŠMT.
- Kuřina, F. (2005). Co je to vlastně didaktika? *Pedagogika*, 55(3), 264–267.
- Kuřina, F. (2009). Didaktická transformace obsahu a školská praxe. *Pedagogika*, 59(3), 298–308.
- Kuřina, F. (1996). Matematika a didaktika v učitelském vzdělání. In *Didaktika matematiky a řešení úloh*. Praha: Univerzita Karlova.
- Kuřina, F., & Půlpán, Z. (2006). *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia.
- Liessmann, K. P. (2008). *Omyly společnosti vědění*. Praha: Academia.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. London: Lea.
- Mareš, J. (1998). *Styly učení žáků a studentů*. Praha: Portál.
- Mareš, J. (2009). Učení ve školním prostředí. In J. Průcha (Ed.), *Pedagogická encyklopedie* (s. 172–177). Praha: Portál.
- Masaryk, T. G. (1990). *Jak pracovat*. Praha: JK.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery I, II*. New York: Wiley.
- Průcha, J. (2005). *Moderní pedagogika*. Praha: Portál.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Skalková, J. (2004). *Pedagogika a výzvy nové doby*. Brno: Paido.
- Stehlíková, N., Hejný, M., & Jirotková, D. (2005). *Úvod do studia analytické geometrie*. Praha: Pedagogická fakulta.
- Stehlíková, N., & Tichá, M. (2011). Didaktika matematiky a její proměny. *Pedagogická orientace*, 21(2), 18–31.
- Šedivý, J. (1969). *O modernizaci školské matematiky*. Praha: SPN.

Autor

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc., Univerzita Hradec Králové,
Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky, Rokitanského 62,
500 03 Hradec Králové, e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz

Pedagogical content knowledge and mathematics education of teachers

Abstract: In the introduction we outline some problems of mathematics education, especially the problem of instructive and constructive approaches to learning. In the second part we compare the concept of pedagogical content knowledge with the concept of didactics as school formation. We prove that Shulman's missing paradigm is plentifully represented in Czech didactics. Further, we characterize global and partial transformations as different approaches to development of pedagogical content knowledge. The issue of understanding is discussed together with the work of Liping Ma and stresses the importance of so called "good practice". The third part deals with the possibilities of integration of didactic and content dimensions of mathematics in teacher education.

Keywords: pedagogical content knowledge, mathematics education, didactics as school formation, understanding, didactic transformation, good practice

Pířová, M., & Duschinská, K. et al. (2011). *Mentoring v učitelství*. Praha: PedF UK.

Aktuálně probíhající diskuse o kvalitě vzdělávání úzce souvisí s profesionalizací učitelské profese. Publikace se věnuje mentoringu, který jako forma učení pro pracoviště, zejména profesního vzdělávání na pracovišti, nabývá v učitelství stále větší důležitosti. Autoři vymezují mentoring a zaměřují se na jeho konceptualizaci, a to i s vědomím rizik, která jsou s jeho implementací spojena. Analyzují roli mentoringu z hlediska současného stavu poznání učitelské profese a procesů profesního rozvoje, pojmenovávají podmínky a procesy, za kterých může mentoring plnit svoji edukativní roli a stát se skutečně prorůstovým faktorem pro učitele jako pro jedince i pro profesi, která své kolektivní vědění umí využít pro svůj další rozvoj. Druhá část publikace je věnována výzkumu v oblasti mentoringu a jsou v ní představeny aktuální výzkumné sondy týkající se mentoringu v kontextu českého systému vzdělávání.

Šebestová, S. (2011). *Příležitosti k rozvíjení řečových dovedností ve výuce anglického jazyka: videostudie*. Brno: Masarykova univerzita.

Publikace pojednává o procesech vyučování a učení ve výuce anglického jazyka na druhém stupni základní školy z hlediska příležitostí k rozvíjení řečových dovedností. Těžištěm publikace je výzkum realizovaný prostřednictvím videostudie s cílem zjistit, jaké příležitosti k rozvíjení řečových dovedností reálná výuka nabízí.